

Linearidade e Superposição

1. Introdução

Nesta apostila são apresentados e discutidos as propriedades de linearidade e o princípio de superposição aplicado a circuitos elétricos. Estas duas propriedades permitem que, em certos casos, a solução de circuitos complexos possa ser obtida de forma simplificada, considerando-se o efeito das fontes independentes de forma isolada e somando-se as soluções correspondentes.

2. Propriedade de Linearidade

A propriedade de linearidade descreve a relação linear entre causa e efeito. Considerando circuitos elétricos ela se aplica aos seus componentes básicos, quando os efeitos secundários tais como efeitos de saturação, temperatura, etc são desprezados. Na presente apostila serão considerados apenas resistores. A linearidade é uma combinação da propriedade de homogeneidade (também conhecida como escalonamento ou proporcionalidade) e da propriedade aditiva.

A homogeneidade expressa o fato de que se a entrada de um sistema (excitação) for multiplicada por uma constante, a saída (resposta) também será multiplicada pela mesma constante. Tomando-se como exemplo um resistor linear, a relação tensão-corrente será dada pela Lei de Ohm. Considerando a corrente como entrada e tensão como saída, existe a seguinte relação entre entrada e saída:

$$v = R \cdot i \quad (1)$$

Caso a corrente (entrada) aumentar por um fator k , a tensão (saída) aumentará também por um fator k :

$$R \cdot (k \cdot i) = k \cdot (R \cdot i) = k \cdot v \quad (2)$$

A propriedade de adição (propriedade aditiva) expressa o fato de que resposta de um sistema uma entrada constituída pela soma de várias será a soma das respostas individuais consideradas separadamente. Por exemplo, considerando a resposta de um resistor a uma entrada constituída de duas correntes, obtém-se a seguinte relação para as respostas individuais a cada uma das correntes:

$$v_1 = R \cdot i_1 \quad (3)$$

$$v_2 = R \cdot i_2 \quad (4)$$

Por outro lado, a resposta para a soma das correntes será:

$$v = R \cdot (i_1 + i_2) = R \cdot i_1 + R \cdot i_2 \quad (5)$$

$$v = v_1 + v_2 \quad (6)$$

Desta forma, pode-se afirmar que o resistor linear possui uma relação tensão corrente que satisfaz tanto a propriedade de homogeneidade como a propriedade aditiva.

Podem-se estender os conceitos aplicados para o resistor para os demais componentes do circuito. Assim, um circuito será considerado linear se todos os seus componentes possuírem a propriedade de homogeneidade e a propriedade aditiva. Circuitos que possuem fontes

independentes, fontes dependentes, capacitores lineares, indutores lineares e resistores lineares é um circuito linear. Para circuitos lineares, a resposta estará linearmente relacionada com a entrada. Como entrada podem-se considerar as fontes independentes e como saída podem-se considerar as tensões e correntes em todos os seus componentes.

Deve-se observar que as propriedades de homogeneidade e aditiva não se aplicam à potência, mas apenas a correntes e tensões. Isto pode ser entendido considerando-se a fórmula da potência, expressa pela seguinte relação:

$$p = R \cdot i^2 = \frac{v^2}{R} \quad (7)$$

Pela relação equação acima, a relação entre potência e corrente (ou potência e tensão) é do tipo não-linear. Portanto, a potência dos componentes do circuito não pode ser obtida somando-se as potências individuais relacionadas com cada fonte. A potência deve ser calculada considerando-se a corrente e a tensão total.

3. Princípio de Superposição

O princípio de superposição é baseado na propriedade de linearidade e portanto se aplica a circuitos lineares, os quais contém fontes independentes, fontes dependentes, capacitores lineares, indutores lineares e resistores lineares. O princípio de superposição estabelece que quando um circuito linear contiver mais de uma fonte independente, a resposta do circuito pode ser obtida a partir da resposta individual do circuito a cada uma das fontes atuando de forma isolada. Desta forma, pode-se determinar a resposta individual do circuito considerando-se as fontes uma a uma e, ao final, somar algebricamente as respostas individuais. A utilização do princípio de superposição pode, em muitos, casos reduzir a complexidade do circuito e facilitar a solução. Para a solução de circuitos deve-se utilizar o princípio de superposição de acordo com os seguintes passos:

Passo 1: desligar todas as fontes independentes do circuito, exceto uma. Fontes de tensão são substituídas por curtos-circuitos e fontes de corrente por circuitos abertos. Fontes dependentes (controladas) não devem ser alteradas.

Passo 2: repetir o passo 1 até que todas as fontes independentes foram consideradas.

Passo 3: determinar a resposta total somando-se as respostas individuais de cada fonte. As tensões e correntes de cada ramo serão a soma das tensões e correntes individuais obtidas. Deve-se atentar para o sentido das correntes e polaridade das tensões nas respostas individuais.

Deve-se também observar que o princípio da superposição é baseado no princípio da linearidade e não se aplica, portanto, a potência, uma vez que esta envolve uma relação não-linear, conforme demonstrado anteriormente. Portanto, a potência total de cada componente devido à atuação de todas as fontes não será a soma das potências individuais quando cada fonte atua de forma isolada.

4. Exemplos

A seguir são apresentados alguns exemplos dos princípios de linearidade e superposição.

4.1 Exemplo 1 - Propriedade de Homogeneidade

Considere o circuito mostrado na Figura 1, onde existe apenas uma fonte de corrente de 10 A. A corrente no resistor de 4 ohms pode ser obtida pela aplicação do divisor conforme segue:

$$i_a = 10 \cdot \frac{20}{20 + 30 + 4} = 3,704 \text{ A}$$

Caso a corrente da fonte seja multiplicada por 5, obtém-se a seguinte corrente na resistência de 4 ohms:

$$i_a^* = 5 \cdot i_a = 5 \cdot 3,704 = 18,52 \text{ A}$$

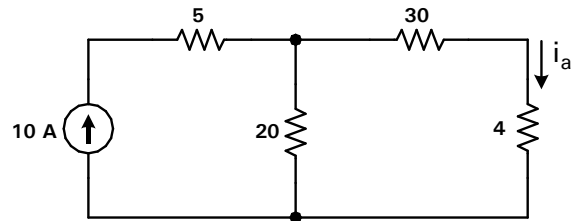


Figura 1 - Propriedade de Homogeneidade

Da mesma forma, as correntes e tensões nos demais componentes podem ser obtidas para esta nova situação por meio da propriedade de homogeneidade.

4.2 Exemplo 2 - Princípio de Superposição

Considere o circuito mostrado na Figura 2a, onde existem duas fontes independentes. Deseja-se calcular a corrente i_a e a potência p_a no resistor de 4 ohms utilizando-se o princípio da superposição. Inicialmente, será considerado apenas o efeito da fonte de corrente, sendo a fonte de tensão substituída por um curto-circuito. O circuito assume a forma mostrada na Figura 2b. Solucionando-se o circuito obtém-se a corrente no resistor de 4 ohms como $i_a^* = 2,703 \text{ A}$. Esta corrente é considerada positiva pois o valor coincide com o sentido arbitrado como positivo. Ou seja, neste caso a fonte de corrente impõe uma corrente no sentido considerado positivo. Considerando-se agora apenas o efeito da fonte de tensão, obtém-se o circuito mostrado na Figura 2c, onde a fonte de corrente foi substituída por um circuito aberto. A corrente que circula no resistor de 4 ohms com o sentido mostrado é

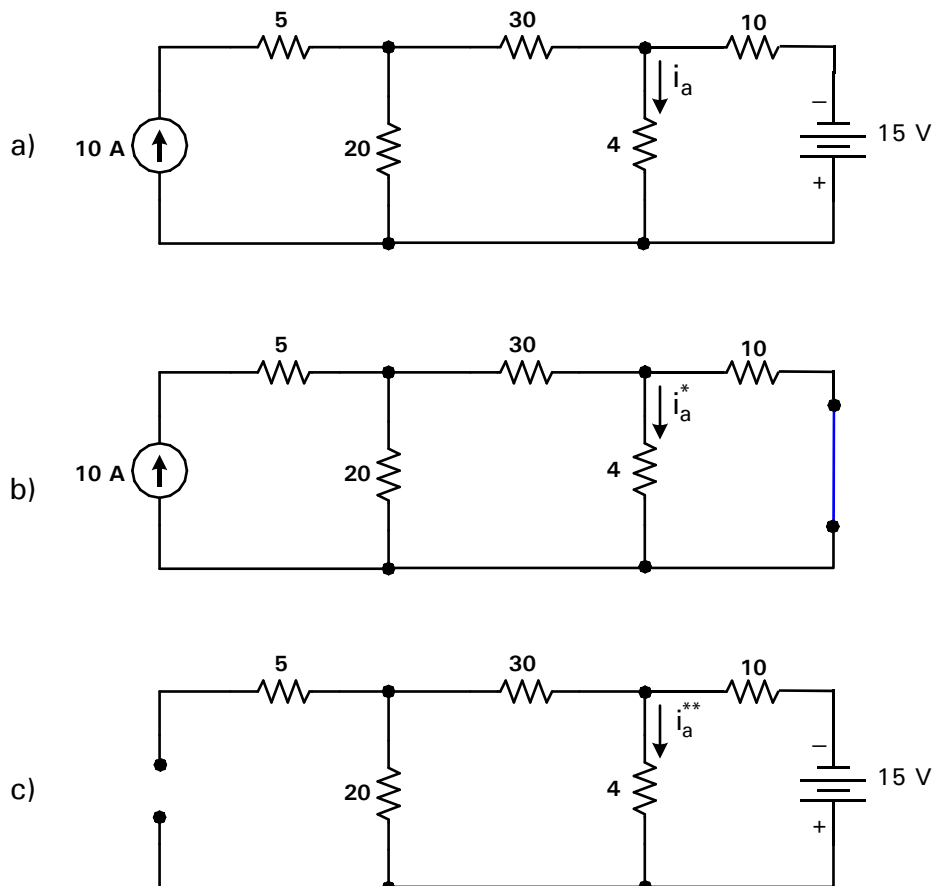


Figura 2 - Aplicação do princípio da superposição a um circuito com duas fontes independentes

$i_a^{**} = -1,014 \text{ A}$. A corrente tem um valor negativo pelo fato de que neste caso a fonte de tensão impõe uma corrente que circula no sentido contrário ao assumido como positivo. Desta forma, pelo princípio de superposição, a corrente total que circula no resistor de 4 ohms será:

$$i_a = i_a^* + i_a^{**} = 2,703 + (-1,014) = 1,689 \text{ A}$$

A potência dever ser sempre calculada a partir da resposta completa, uma vez que o princípio de linearidade e de superposição não se aplica para a potência:

$$p_a = R \cdot (i_a)^2 = 4 \cdot 1,689^2 = 11,41 \text{ W}$$

5. Exercício Proposto

Para o circuito mostrado na Figura 3, determine o que segue utilizando o princípio da superposição:

- a corrente i_a e a potência p_a no resistor de 30 ohms conforme mostrado. (*resposta para fonte de corrente: $i_a^* = 7,167 \text{ A}$, resposta para fonte de tensão: $i_a^{**} = -0,498 \text{ A}$ resposta total: $i_a = i_a^* + i_a^{**} = 6,667 \text{ A}$ e $p_a = 1333,46 \text{ W}$)*)
- implemente um arquivo de simulação no Orcad (ou Matlab/Simulink) e comprove os resultados obtidos. Obtenha os resultados parciais com as fontes atuando de forma isolada.

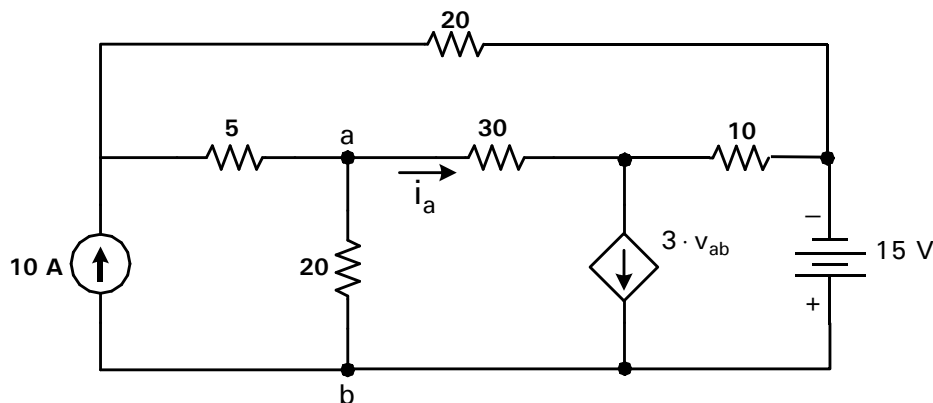


Figura 3 - Aplicação do princípio da superposição a um circuito com fontes dependentes

6. Exercícios Aconselhados

A seguir é apresentada uma lista de exercícios selecionados da bibliografia aconselhada para a disciplina. Recomenda-se que todos os exercícios sejam resolvidos.

Charles K. Alexander e Matthew N. O. Sadiku (2003). Fundamentos de circuitos elétricos. Bookman (Central 20, Edição 2000) - Capítulo 4. Problemas: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16.

James W. Nilsson e Susan A. Riedel (2003). Circuitos elétricos. LTC Editora. 621.3192 N712c (Central 15, Edição 1999): Capítulo 4. Problemas 4.83, 4.84, 4.85, 4.86, 4.87, 4.88, 4.89, 4.90, 4.91, 4.92.