

Método de Análise Nodal

1. Introdução

Conforme visto anteriormente, a solução de um circuito elétrico contendo b ramos requer a determinação de $2b$ incógnitas, as quais são a corrente e a tensão de cada ramo. Também foi mostrado que a aplicação das Leis de Kirchhoff e a consideração das relações tensão-corrente de cada ramo permite estabelecer as equações necessárias para a solução do circuito. No entanto, a solução fica mais simples quando se utiliza um conjunto de variáveis distinto das variáveis de ramo. No caso da análise de nós serão utilizadas as tensões dos nós do circuito em relação a um nó de referência, ao invés da tensão de ramo (tensão entre os terminais de cada ramo). Desta forma será obtido um sistema de equações tendo como incógnitas as tensões dos nós do circuito em relação ao nó de referência, o qual pode ser escolhido como qualquer nó do circuito. A aplicação sistemática deste procedimento é denominada *Análise Nodal* e é descrita resumidamente a seguir. Maiores detalhes são obtidos na bibliografia indicada.

2. Procedimento Básico

A análise nodal envolve sempre os cinco passos descritos a seguir.

2.1 Seleção do Nó de Referência

Inicialmente deve ser selecionado um nó qualquer do circuito como nó de referência, em relação ao qual todas as tensões serão determinadas. O potencial deste nó será assumido como zero, motivo pelo qual ele muitas vezes também é denominado de *nó de terra*. Em seguida os demais nós são numerados de 1 a $(n-1)$, sendo n o número total de nós do circuito incluindo o nó de referência. As demais tensões dos nós serão designadas como $V_1, V_2, V_3 \dots V_{n-1}$.

2.2 Aplicação da LCK aos Nós

Após a escolha do nó de referência e numeração dos nós restantes, deve-se aplicar a Lei de Kirchhoff para os $(n-1)$ nós. A LCK não necessita ser aplicada para o nó de referência, uma vez que resultará numa equação a mais do que o necessário para a solução do circuito. Deve-se adotar uma convenção de sinal de acordo com o sentido das correntes em relação aos nós. Geralmente, são consideradas positivas as correntes que entram no nó, enquanto que correntes que saem são consideradas negativas. Como resultado desta etapa, haverá $(n-1)$ equações que representam os somatórios das correntes que incidem e saem dos $(n-1)$ nós.

2.3 Consideração das Relações Tensão-Corrente dos Ramos

As equações da etapa anterior foram escritas em função das correntes de nós. No entanto, as incógnitas são tensões de nó. Deve-se, portanto, utilizar as relações de tensão-corrente para substituir as correntes de nós por relações envolvendo as tensões de nó. Como resultado desta etapa, obtém-se $(n-1)$ equações envolvendo as tensões de nó. Deve-se atentar que existe uma relação tensão corrente para cada ramo, existindo portanto b relações deste tipo.

2.4 Solução do Sistema de Equações

Após a obtenção das equações de nó, deve-se utilizar algum método de solução de sistemas de equações e determinar as $(n-1)$ incógnitas. Num caso geral, obtém-se um sistema de equações íntegro-diferenciais, cuja solução é assegurada caso o circuito seja composto apenas de elementos lineares e invariáveis no tempo. Caso o circuito seja composto apenas

de resistores, obtém-se um sistema de $(n-1)$ equações algébricas onde os coeficientes são obtidos a partir das resistências do circuito, sendo a solução neste caso mais fácil, uma vez que as equações não envolvem integrais e derivadas.

2.5 Obtenção das Correntes e Tensões de Ramos

Deve-se atentar para o fato que, depois de solucionado o sistema de equações, pode-se obter todas as correntes e tensões de ramo do circuito a partir das tensões de nó. Por exemplo, a tensão do ramo k , conectado entre os nós x e y do circuito conforme a Figura 1, pode ser obtida pela seguinte equação:

$$v_k = v_{xy} = v_x - v_y \quad (1)$$

Considerando-se os sentidos associados, a corrente no ramo k que circula do nó x para o nó y será dada como:

$$i_k = \frac{v_x - v_y}{R_k} = (v_x - v_y) \cdot G_k \quad (2)$$

$$G_k = \frac{1}{R_k} \quad (3)$$

R_k - resistência do ramo k (ohms, Ω)

G_k - condutância do ramo k (siemens, S)

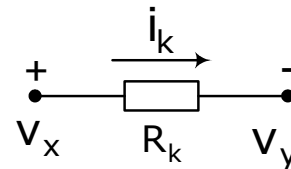


Figura 1 - Tensão e corrente de ramo

3. Exemplo de Aplicação

O método exposto será ilustrado por meio de um exemplo simples ilustrado na Figura 2, onde todas as etapas citadas serão realizadas.

3.1 Seleção do Nó de Referência

Para o circuito mostrado na Figura 2 existem 3 nós, sendo que o nó inferior será escolhido como nó de referência (nó de terra). As tensões nos outros dois nós serão denominadas v_1 e v_2 , respectivamente. As correntes nos resistores R_1 , R_2 e R_3 serão denominadas de i_1 , i_2 e i_3 .

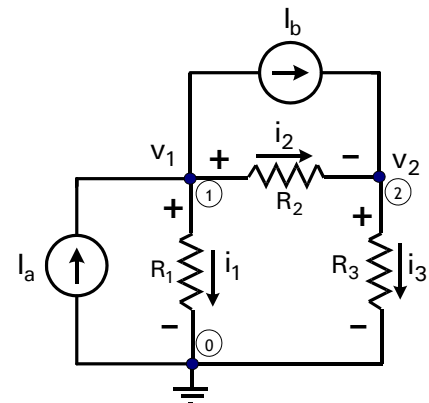


Figura 2 - Circuito de exemplo

3.2 Aplicação da LCK aos Nós

Aplicando-se a LCK para os nós 1 e 2 resulta, respectivamente:

$$+I_a - I_b - i_1 - i_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad +I_a - I_b = i_1 + i_2 \quad (4)$$

$$+I_b - i_3 + i_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_b = i_3 - i_2 \quad (5)$$

3.3 Consideração das Relações Tensão-Corrente dos Ramos

Considerando os sentidos associados as relações tensão-corrente para os resistores R_1 , R_2 e R_3 serão:

$$i_1 = \frac{v_1 - 0}{R_1} = \frac{v_1}{R_1} \quad \text{ou} \quad i_1 = v_1 \cdot G_1 \quad (6)$$

$$i_2 = \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad \text{ou} \quad i_2 = (v_1 - v_2) \cdot G_2 \quad (7)$$

$$i_3 = \frac{v_2 - 0}{R_3} = \frac{v_2}{R_3} \quad \text{ou} \quad i_3 = v_2 \cdot G_3 \quad (8)$$

Substituindo-se as equações (6), (7) e (8) nas equações (4) e (5), obtém-se o seguinte sistema de equações em termos das resistências e fontes de corrente:

$$+I_a - I_b = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = v_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{v_2}{R_2} \quad (9)$$

$$I_b = \frac{v_2}{R_3} - \frac{(v_1 - v_2)}{R_2} = -\frac{v_1}{R_2} + v_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (10)$$

Na forma matricial, as equações acima podem ser escritas como:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_b \end{bmatrix} \quad (11)$$

As equações também podem ser escritas em termos de condutâncias:

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a - I_b \\ I_b \end{bmatrix} \quad (12)$$

3.4 Solução do Sistema de Equações

A solução do sistema será realizada considerando os seguintes valores numéricos :

$$I_a = 5 \quad \text{A}$$

$$I_b = 3 \quad \text{A}$$

$$R_1 = 2 \quad \Omega \quad \Rightarrow \quad G_1 = 0.5 \quad \text{S}$$

$$R_2 = 4 \quad \Omega \quad \Rightarrow \quad G_2 = 0.25 \quad \text{S}$$

$$R_3 = 8 \quad \Omega \quad \Rightarrow \quad G_3 = 0.125 \quad \text{S}$$

Com os valores anteriores o sistema de equações assumirá a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ -0.25 & 0.375 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Solucionando-se o sistema para os valores considerados, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.857 \\ 12.571 \end{bmatrix} \quad \text{volts} \quad (14)$$

3.5 Obtenção das Correntes e Tensões de Ramos

A partir das tensões de nó v_1 e v_2 obtém-se por meio das equações (6) a (8) correntes de ramo:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{6.857}{2} = 3.429 \quad \text{A} \quad (15)$$

$$i_2 = \frac{6.857 - 12.571}{4} = -1.428 \quad \text{A} \quad (16)$$

$$i_3 = \frac{v_2}{R_3} = \frac{12.571}{8} = 1.571 \quad \text{A} \quad (17)$$

As tensões sobre os ramos serão dadas pelas seguintes equações:

$$v_{R_1} = v_{1-0} = v_1 - 0 = v_1 = 6.857 \quad \text{V} \quad (18)$$

$$v_{R_2} = v_{1-2} = v_1 - v_2 = 6.857 - 12.571 = -5.714 \quad \text{V} \quad (19)$$

$$v_{R_3} = v_{2-0} = v_2 - 0 = 12.571 \quad \text{V} \quad (20)$$

O sinal negativo da tensão v_{R_2} que aparece na solução significa que a tensão que efetivamente existe sobre este componente possui polaridade contrária ao sentido assumido como positivo. Da mesma forma, a corrente negativa significa que o sentido que efetivamente existe é contrário àquele considerado positivo.

Com a determinação de todas as tensões e correntes do circuito, pode-se também determinar a potência dissipada em cada um dos resistores e nas fontes de corrente.

4. Obtenção das Equações de Nós por Inspeção

Quando o circuito contém **somente resistores lineares e fontes independentes de corrente**, pode-se escrever diretamente as equações de nós do circuito. Deve-se observar que a matriz de coeficientes do sistema de equações contém valores de condutância, sendo portanto denominada de *matriz de condutâncias*. Ela possui a seguinte forma geral onde $N = n-1$:

$$[G] = \begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ -G_{12} & +G_{22} & \cdots & -G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{N1} & -G_{N2} & \cdots & +G_{NN} \end{bmatrix} \quad (21)$$

A matriz de condutâncias é uma matriz do tipo simétrica com as seguintes propriedades, as quais permitem a sua montagem baseada apenas na topologia do circuito.

G_{kk} = soma das condutâncias conectadas ao nó k

$G_{jk} = G_{kj}$ = soma das condutâncias conectadas entre os nós j e k

Deve-se observar que os elementos fora da diagonal principal serão valores negativos na matriz de condutâncias. O sistema de equações terá a seguinte forma geral:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} & \cdots & -G_{1N} \\ -G_{12} & G_{22} & \cdots & -G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -G_{1N} & -G_{2N} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$[G] \cdot [V] = [I] \quad (23)$$

$$[I] = [I_1 \ I_2 \ \cdots \ I_N]^T \quad (24)$$

$$[V] = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N]^T \quad (25)$$

I_k - somatório das fontes das fontes de corrente que estão conectadas ao nó, sendo que as fontes entrando no nó são consideradas positivas e as saindo negativas.

Baseado nas propriedades acima, pode-se montar diretamente as equações de nó do circuito, atentando-se para o fato que o circuito contenha apenas fontes de corrente independentes e resistores lineares. Pode-se comprovar esta afirmação para o exemplo anterior obtendo-se diretamente as equações de nó do circuito.

5. Transformação de Fontes

A análise de nós é mais simples quando todas as fontes que existem são fontes de corrente. Quando isto não ocorrer, pode-se transformar fontes de tensão em série com um resistor (Figura 3a) em fontes de corrente com o resistor em paralelo (Figura 3b), de acordo com as relações que seguem.

$$E = R \cdot I \Leftrightarrow I = \frac{E}{R} \quad (26)$$

Por meio das transformações de fonte pode-se, exceto em casos especiais, obter um circuito onde apenas aparecem fontes de corrente e análise nodal pode ser facilmente realizada. Deve-se também atentar para o fato que nem sempre é possível converter facilmente todas as fontes de tensão do circuito para fontes de corrente.

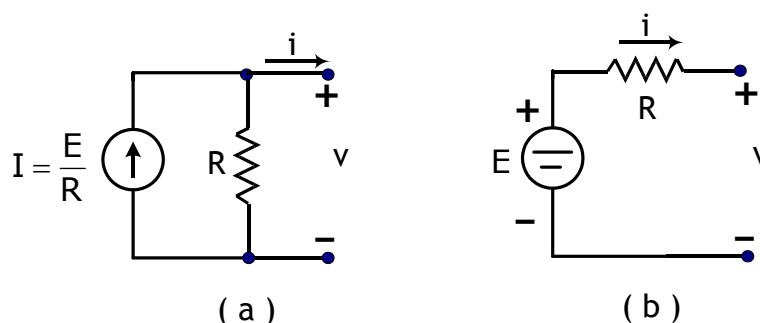


Figura 3 - Equivalência de fontes

6. Análise Nodal com Fontes de Tensão

A análise nodal, sendo um método geral de análise, pode também ser empregada quando o circuito contiver fontes de tensão sejam elas dependentes ou independentes. As fontes de tensão impõem uma determinada diferença de potencial entre dois nós, não sendo possível determinar a corrente da mesma antes de solucionar o circuito. Estas características devem ser consideradas quando do estabelecimento das equações do circuito. Existem diversas formas de considerar o efeito das fontes de tensão, sendo que uma delas é descrita a seguir.

Considerando que a fonte de tensão está conectada entre os terminais x e y conforme a Figura 4, observa-se que a corrente da fonte aparecerá nas equações de ambos os nós do circuito onde a fonte está conectada. Como não há uma relação entre a corrente da fonte e a sua tensão pode-se manter a corrente i_k da fonte como uma incógnita a ser determinada. Por outro lado, as tensões dos nós x e y estão relacionados da seguinte forma.

$$E = v_x - v_y \quad (27)$$

Desta forma, foi acrescentada uma incógnita ao sistema de equações, mas também foi acrescentada uma equação, sendo ainda possível solucionar o circuito. No total existirá, assim, n equações.

Também pode-se eliminar a corrente da fonte do sistema de equações isolando-se a corrente i_k na equação do nó x, por exemplo, e substituindo-a na equação do nó y. Desta forma, elimina-se a equação do nó x, ficando o sistema novamente com (n-1) equações.

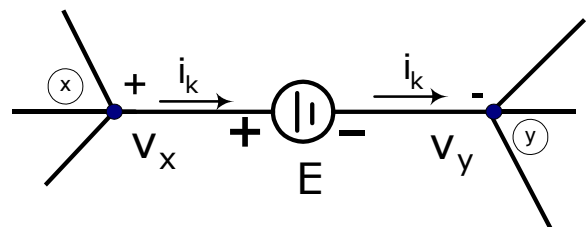


figura 4 - Fonte de tensão entre dois nós

Caso a fonte de tensão estiver conectada entre o nó x e o nó de terra, significa que a tensão do nó está imposta, podendo-se neste caso desconsiderar a equação deste nó estabelecer o seguinte valor para a tensão do nó:

$$E = v_x \quad (28)$$

O procedimento delineado corresponde ao tratamento dos dois nós onde a fonte está conectada por como se fossem um único nó e aplicando-se a LCK para este nó composto, também chamado de *super-nó* ou *nó generalizado* (vide bibliografia).

O exemplo mostrado na Figura 5 ilustra o procedimento. Para este circuito as equações de nós são as seguintes:

nó 1:

$$+I_a + I_f - i_1 - i_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad +I_a = i_1 + i_3 - I_f \quad (29)$$

nó 2:

$$+i_3 - I_f - I_b - i_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad +I_b = i_3 - i_2 - I_f \quad (30)$$

As relações tensão corrente são as seguintes:

$$i_1 = \frac{v_1 - 0}{R_1} = \frac{v_1}{R_1} \quad \text{ou} \quad i_1 = v_1 \cdot G_1 \quad (31)$$

$$i_2 = \frac{v_2 - 0}{R_2} = \frac{v_2}{R_2} \quad \text{ou} \quad i_2 = v_2 \cdot G_2 \quad (32)$$

$$i_3 = \frac{v_1 - v_2}{R_3} \quad \text{ou} \quad i_3 = (v_1 - v_2) \cdot G_3 \quad (33)$$

A equação adicional considerando a fonte de tensão é:

$$E = v_1 - v_2 \quad (34)$$

substituindo as relações (31) a (34) obtém-se finalmente as equações do circuito. Deve-se notar que a corrente da fonte de tensão aparece como uma incógnita a mais, havendo também uma equação a mais (equação (34)).

$$+I_a = v_1 \cdot G_1 + (v_1 - v_2) \cdot G_3 - I_f$$

$$+I_a = v_1 \cdot (G_1 + G_3) - v_2 \cdot G_3 - I_f \quad (35)$$

$$+I_b = (v_1 - v_2) \cdot G_3 - v_2 \cdot G_2 - I_f$$

$$+I_b = v_1 \cdot G_3 - v_2 \cdot (G_2 + G_3) - I_f \quad (36)$$

Multiplicando-se a última equação por (-1), resulta:

$$-I_b = -v_1 \cdot G_3 + v_2 \cdot (G_2 + G_3) + I_f \quad (37)$$

As equações (34), (35) e (36) são portanto as equações básicas do circuito, sendo as incógnitas v_1 , v_2 e I_f .

De forma matricial, o sistema de equações pode ser escrito como:

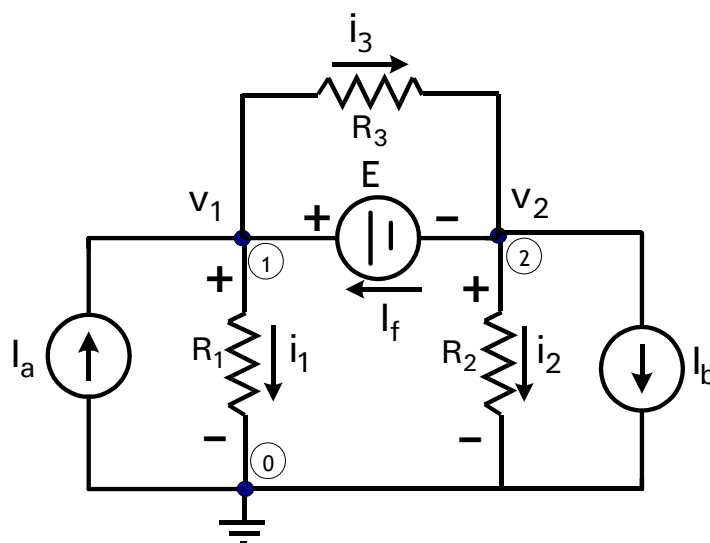


Figura 5 - Análise nodal com fonte de tensão

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3) & -G_3 & -1 \\ G_3 & (G_2 + G_3) & +1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +I_a \\ -I_b \\ +E \end{bmatrix} \quad (38)$$

Considerando-se os seguintes valores:

$$I_a = 2 \text{ A}$$

$$I_b = 7 \text{ A}$$

$$R_1 = 2 \text{ } \Omega \Rightarrow G_1 = 0.5 \text{ S}$$

$$R_2 = 4 \text{ } \Omega \Rightarrow G_2 = 0.25 \text{ S}$$

$$R_3 = 10 \text{ } \Omega \Rightarrow G_3 = 0.10 \text{ S}$$

$$E = 2 \text{ V}$$

Obtém-se para o sistema:

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.10 & -1 \\ -0.10 & 0.35 & +1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 \\ -7 \\ +2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se, finalmente, a solução:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ I_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -6 \\ -4.8 \end{bmatrix} \quad (40)$$

7. Exercícios Propostos

Os exercícios abaixo foram selecionados da bibliografia da disciplina. Recomenda-se que todos os exercícios sejam resolvidos.

Charles K. Alexander e Matthew N. O. Sadiku (2003). Fundamentos de Circuitos Elétricos. Bookman (Central 20, Edição 2000) - Capítulo 3. Questões de revisão: 3.1, 3.2, 3.7. Problemas: 3.4, 3.6, 3.7, 3.11, 3.15, 3.23, 3.24, 3.25, 3.33, 3.34, 3.35, 3.40, 3.42, 3.46., 3.47, 3.49, 3.50, 3.56, 3.58.

James W. Nilsson e Susan A. Riedel (2003). Circuitos Elétricos. LTC Editora. 621.3192 N712c (Central 15, Edição 1999): Capítulo 3. Problemas 3.2, 3.9, 3.23, 3.26, 3.31, 3.32, 3.36, 3.38, 3.39, 3.41, 3.64, 3.65.