

CC33D - EP35A - QM34A – Cálculo Numérico

APS – Lista 02 – Sistemas Lineares e Fatoração Matricial

Problema 1. Resolva os seguintes sistemas lineares utilizando a fatoração LU da matriz dos coeficientes:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema 2. Considere as matrizes a seguir. Encontre a matriz permutação P de forma que PA possa ser fatorada no produto LU em que L é uma matriz triangular inferior com 1 em sua diagonal principal e U é uma matriz triangular superior. Determine, então, L e U .

$$\text{a)} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema 3. Seja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ um sistema linear em que A é uma matriz $n \times n$ que admite fatoração LU .

- a) Mostre que o algoritmo da fatoração LU exige $(n^3 - n)/3$ multiplicações/divisões e $(2n^3 - 3n^2 + n)/6$ adições/subtrações.
- b) Mostre que a resolução de $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, em que L é uma matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$ para todo i , requer $(n^2 - n)/2$ multiplicações/divisões e $(n^2 - n)/2$ adições/subtrações.
- c) Mostre que a resolução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por fatoração LU exige, no total, $(n^3 + 3n^2 - n)/3$ multiplicações/divisões e $(2n^3 + 3n^2 - 5n)/6$ adições/subtrações. Esses números de operações são idênticos aos do processo de resolução por eliminação de Gauss (sem pivoteamento) e substituição reversa.
- d) Conte o número de operações exigidas para resolver m sistemas lineares $A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$ para $k = 1, 2, \dots, m$ fatorando, primeiramente, A e depois utilizando a substituição direta ($L\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}$) e substituição reversa ($U\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)}$) m vezes.

Problema 4. Encontre α e β para que as seguintes matrizes sejam definidas positivas:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 5. Encontre α e β para que as seguintes matrizes sejam estritamente diagonal dominantes:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 4 & \alpha & 1 \\ 2\beta & 5 & 4 \\ \beta & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ sendo } \beta > 0.$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & \beta \\ \alpha & 5 & \beta \\ 2 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \text{ sendo } \alpha > 0 \text{ e } \beta > 0.$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Problema 6. Re-ordene, se necessário, os sistemas abaixo para que os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel certamente converjam e encontre as duas primeiras iterações de cada método com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right. \\ \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 10x_1 - x_2 = 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 7 \\ -2x_2 + 10x_3 = 6 \end{array} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_4 - x_5 = 6 \\ -x_4 + 4x_5 - x_6 = -2 \\ -x_5 + 4x_6 = 6 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right. \\ \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \end{array} \right. & \end{array}$$

Problema 7. Resolva os sistemas lineares do exercício anterior pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, se convergentes, com $\varepsilon = 10^{-3}$ e norma $\|\cdot\|_\infty$.

Problema 8. Demonstre o seguinte limitante para o erro,

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \|T\|^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|$$

para o seguinte método iterativo

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}, \quad k = 1, 2, \dots$$

em que T é uma matriz $n \times n$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante, $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário e $\mathbf{x}$ é tal que $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

Problema 9. Estime, se possível, o número de iterações necessárias para todos os itens do problema 7 utilizando as expressões do problema 8.