

CC33D - EP35A – Cálculo Numérico

APS – Lista 01 – Solução aproximada de equações algébricas

Problema 1. Encontre uma aproximação para a solução das equações abaixo nos intervalos indicados utilizando o método da Bissecção com tolerância $\varepsilon = 10^{-2}$:

a) $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$, em $[0, 2; 0, 3]$ e $[1, 2; 1, 3]$

b) $(x - 2)^2 - \ln x = 0$, em $[1, 2]$ e $[e, 4]$

c) $2x \cos(2x) - (x - 2)^2 = 0$, em $[2, 3]$ e $[3, 4]$

Problema 2. Estime o número de iteradas necessárias do método da Bissecção no problema anterior. Compare com o número realmente necessário.

Problema 3. Repita o problema 1 utilizando o método da Falsa Posição com tolerância $\varepsilon = 10^{-2}$.

Problema 4. Repita o problema 1 utilizando o método de Newton-Raphson com tolerância $\varepsilon = 10^{-6}$.

Problema 5. Repita o problema 1 utilizando o método da Secante com tolerância $\varepsilon = 10^{-6}$.

Problema 6. Gere o gráfico de $f(x) = 2x \cos(2x) - (x - 2)^2$ nos intervalos $[2, 3]$ e $[3, 4]$ indicados e faça geometricamente as quatro primeiras iteradas dos métodos da Bissecção, da Falsa Posição, de Newton (com p_0 sendo o ponto médio do intervalo) e da Secante.

Problema 7. Utilizando um método de sua escolha, determine o ponto x em que $f'(x) = 0$ para as funções abaixo nos intervalos dados:

a) $f(x) = 1 - e^x + (e - 1)\sin(\pi x/2)$ em $[0, 1]$

b) $f(x) = (x - 1)\tan x + x \sin \pi x$ em $[0, 1]$

c) $f(x) = x \sin \pi x - (x - 2)\ln x$ em $[1, 2]$

d) $f(x) = (x - 2)\sin(x)\log(x + 2)$ em $[-1, 3]$

Problema 8. Considere as funções $f(x) = \cos x - x$ e $g(x) = \cos x$. Mostre que o zero de f coincide com o ponto fixo de g . Determine um intervalo em que a iteração funcional de g certamente converge para o ponto fixo. Faça a representação geométrica das iterações e, então, determine numericamente o ponto fixo com tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$. Escreva o método de Newton para encontrar a raiz de f e o analise como um método de iteração funcional (analiticamente e graficamente).

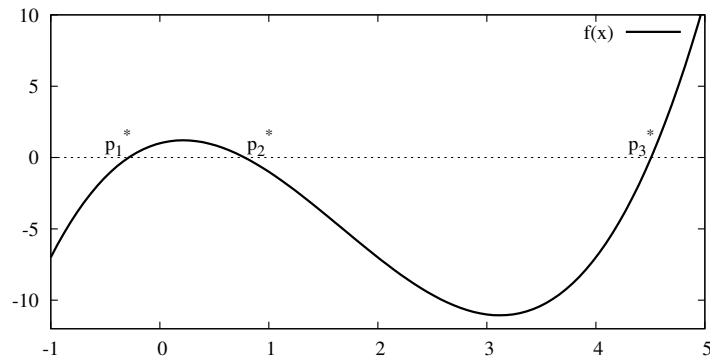
Problema 9. Transforme as equações do problema 1 em um problema de ponto-fixo, isto é

$$f(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(p) = p,$$

tal que a iteração funcional $p_{n+1} = g(p_n)$ *certamente convija* (OBS: pode ser necessário re-adequar os intervalos). Obtenha, então, uma estimativa para o número de iterações necessárias para que o erro da iteração funcional seja *certamente menor* que $\varepsilon = 10^{-3}$. Faça a iteração funcional com esta tolerância e compare o número de iteradas realmente necessárias.

QUESTÕES DE PROVAS ANTERIORES:

Problema 10. (a) Mostre que $g(x) = \pi + \frac{1}{2}\sin(x/2)$ tem um único ponto fixo em $[0, 2\pi]$. (b) Aplique a iteração funcional para encontrar uma aproximação do ponto fixo até que $|p_{k+1} - p_k| < 10^{-2}$. (c) Estime o número de iterações necessárias para que a precisão 10^{-q} seja alcançada, sendo q um inteiro positivo.



Problema 11. Considere a função $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$, indicada no gráfico acima. Existem três raízes p_i^* de f em $[a, b] = [-1, 5]$. Denote-as por $p_1^* < p_2^* < p_3^*$.

- Para qual das três raízes o método da bissecção convergirá utilizando $[a, b]$ como intervalo inicial? Justifique.
- Como você alteraria o intervalo inicial para que as outras duas raízes fossem obtidas pelo mesmo método?
- Estime o número de iterações necessárias para que cada uma das raízes fosse determinada pelo método da bissecção com q casas decimais de precisão para os intervalos determinados nos itens (a) e (b).
- Utilizando o método de Newton, determine uma aproximação para p_2^* tal que $|f(p_2^*)| < 10^{-3}$.

Problema 12. Considere o seguinte problema de iteração funcional:

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad \text{para } n \geq 1, \quad \text{com } p_0 \in [-\pi, \pi] \quad \text{e} \quad g(x) = \sin(\beta x),$$

em que β é um número real entre $\beta_1 = 0, 5 < \beta < \beta_2$.

- Determine o valor de β_2 tal que a sequência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ sempre convirja para o único ponto fixo $p = 0$ no intervalo indicado.
- Faça $\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2$ e mostre que a sequência $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge linearmente (convergência de primeira ordem) para $p = 0$, com constante de erro assintótica dada por β . [Dica: use a expansão em polinômios de Taylor de $g(x)$ em torno de $p = 0$.]
- Para o valor de β determinado, calcule os cinco primeiros pontos da sequência gerada pela iteração funcional com $p_0 = 0, 50$.