17-20 Use coordenadas cilíndricas ou esféricas para calcular a integral. ■

17. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2\, dz\, dy\, dx \quad (a > 0)$

18. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dz\, dy\, dx$

19. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\, dz\, dx\, dy$

20. $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dx\, dy$

21-24 Verdadeiro/Falso Determine se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Explique sua resposta. ■

21. Uma integral tripla em coordenadas cartesianas pode ser expressa como uma integral iterada em coordenadas cilíndricas como

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \iiint_{\substack{\text{limites}\\ \text{apropriados}}} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z) r^2\, dz\, dr\, d\theta$$

22. Se $0 \le \rho_1 < \rho_2$, $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le 2\pi$ e $0 \le \phi_1 < \phi_2 \le \pi$, então o volume da cunha esférica limitada pelas esferas $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$ e os semiplanos $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ e as folhas de cone $\phi = \phi_1$ e $\phi = \phi_2$ será

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2\, \text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

23. Seja G a região sólida do espaço tridimensional entre as esferas de raios 1 e 3 centradas na origem e acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$. O volume de G é igual a

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^3 \rho^2\, \text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

24. Se G for o sólido do Exercício 23 e se $f(x, y, z)$ for contínua em G, então

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \int_1^3 F(\rho, \theta, \phi) \rho^2\, \text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

onde $F(\rho, \theta, \phi) = f(\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\cos\phi)$.

C **25.** (a) Use um CAS para calcular

$$\int_{-2}^2 \int_1^4 \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{r\,\text{tg}^3\,\theta}{\sqrt{1+z^2}}\, d\theta\, dr\, dz$$

(b) Encontre uma função $f(x, y, z)$ e esboce uma região G do espaço tridimensional tais que a integral tripla em coordenadas retangulares

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV$$

tenha o mesmo valor que a integral em coordenadas cilíndricas de (a).

C **26.** Use um CAS para calcular

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos\theta} \rho^{17} \cos\phi \cos^{19}\theta\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

27. Encontre o volume dentro de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ usando
(a) coordenadas cilíndricas;
(b) coordenadas esféricas.

28. Seja G o sólido no primeiro octante limitado pela esfer $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e os planos coordenados. Calcule

$$\iiint_G xyz\, dV$$

(a) usando coordenadas retangulares;
(b) usando coordenadas cilíndricas;
(c) usando coordenadas esféricas.

29. Calcule o volume do sólido no primeiro octante limitado pel esfera $\rho = 2$, os planos coordenados e os cones $\phi = \pi/6$ $\phi = \pi/3$.

30. Neste exercício, vamos deduzir uma fórmula para o volume d cunha esférica ilustrada nas Figuras 14.6.7 e 14.6.9.

(a) Use uma integral tripla em coordenadas cilíndricas par mostrar que o volume do sólido limitado acima por um esfera $\rho = \rho_0$, abaixo por um cone $\phi = \phi_0$ e dos lados po $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ é

$$V = \tfrac{1}{3}\rho_0^3(1 - \cos\phi_0)(\theta_2 - \theta_1)$$

[*Sugestão*: Em coordenadas cilíndricas, a esfera tem equação $r^2 + z^2 = \rho_0^2$ e o cone tem equação $z = r\,\text{cotg}\,\phi_0$. Par simplificar, considere somente o caso $0 < \phi_0 < \pi/2$.]

(b) Subtraia os volumes apropriados e use o resultado da part (a) para deduzir que o volume ΔV da cunha esférica é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Aplique o Teorema do Valor Médio às funções $\cos\phi$ e ρ para concluir que a fórmula da parte (b) pode ser escrit como

$$\Delta V = \rho^{*2}\, \text{sen}\,\phi^*\, \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta$$

onde ρ^* está entre ρ_1 e ρ_2, ϕ^* está entre ϕ_1 e ϕ_2 $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

31. Texto Suponha que uma integral tripla seja expressa em co ordenadas cilíndricas ou esféricas de tal modo que a variáve de integração mais externa seja θ e nenhum dos limites de in tegração envolva θ. Discuta o que isso diz sobre a região d integração da integral.