Cap. 15 - Oscilações

Introdução:

As Oscilações estão presentes no nosso dia a dia como o vento que balança uma linha de transmissão elétrica, as vibrações da membrana de um alto-falante, ou de um instrumento de percussão. Um terremoto faz vibrar as edificações ocasionando danos. Neste estudo, nos preocuparemos com um movimento básico chamado *movimento harmônico simples (MHS)*.

Movimento Harmônico Simples:

Uma propriedade importante do movimento oscilatório é a frequência, o número de oscilações completas por segundo.

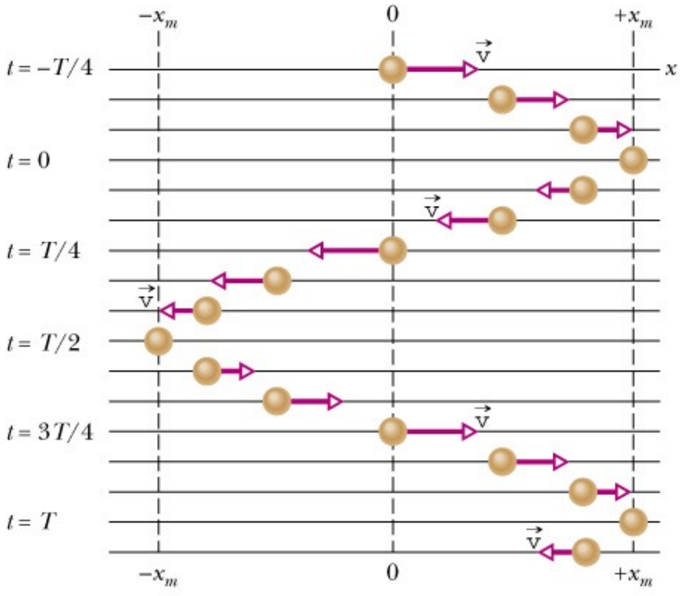
1 hertz = 1 Hz = 1 oscilação por segundo = 1 s^{-1}

Uma grandeza relacionada a frequencia é o período *T* do movimento, que é o tempo necessário para completar uma oscilação completa (ou um ciclo)

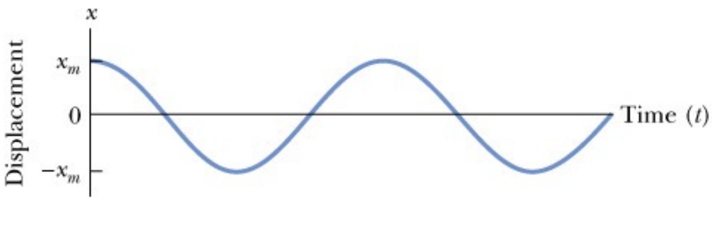
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Movimento periódico ou harmônico: qualquer movimento que se repete a intervalos regulares.

Para um mhs, o deslocamento x da partícula a partir da origem é dado como uma função do tempo por:



(a)



(b)

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

x_m, ω e Φ são as constantes amplitude máxima, velocidade angular e constante de fase (ângulo de fase) respectivamente.

A freqüência angular é calculada por ω

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

A velocidade de uma partícula em MHS é dada por:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x_m \cos(\omega t + \phi)\right]$$

ou

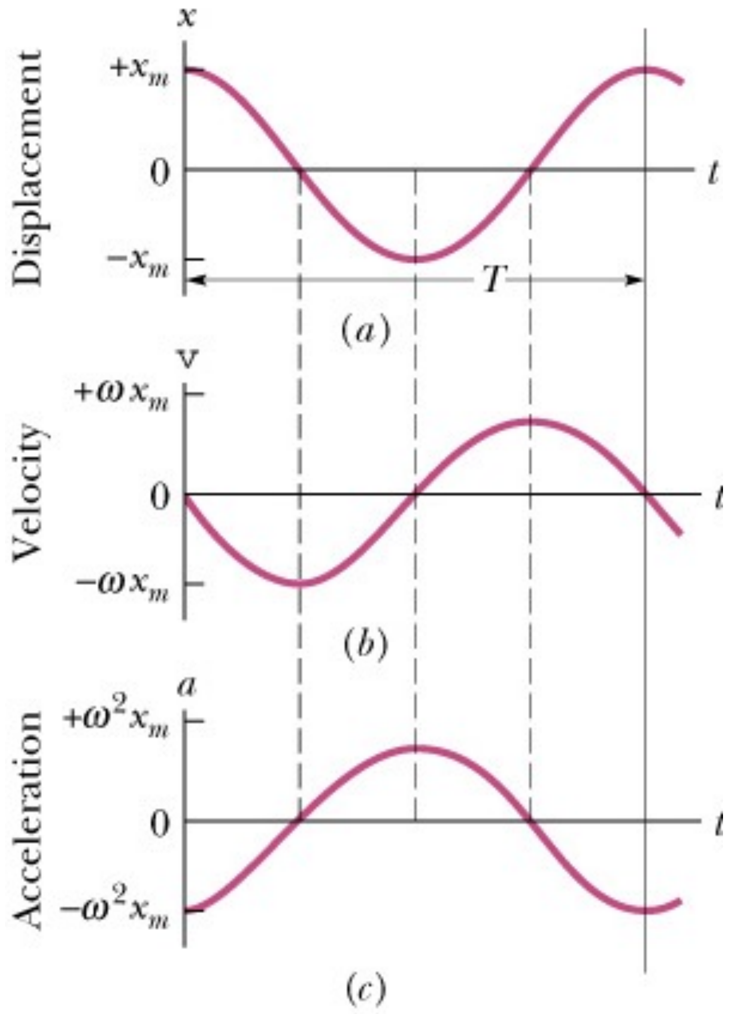
$$v(t) = -\omega x_m sen(\omega t + \phi)$$

A aceleração no MHS será

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\omega x_m sen(\omega t + \phi)\right]$$

ou

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



Usando as equações da posição x(t) e a(t) tem-se:

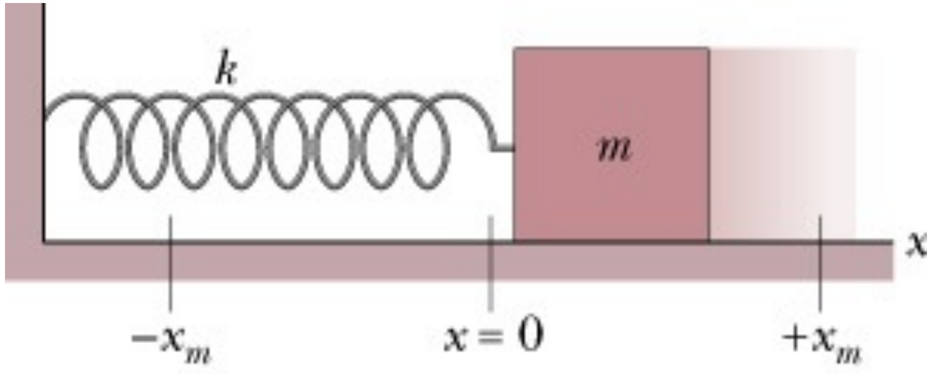
$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

http://www.fisicanimada.net.br/?q=oscilacoes/mhs

Lei do Movimento Harmônico Simples (MHS)

Se combinarmos a segunda lei de Newton com a aceleração encontrada anteriormente, teremos:

$$F = ma = -(m\omega^2)x$$



Este resultado é familiar, a lei de Hooke,

$$F = -kx$$

A freqüência angular w do movimento harmônico simples do bloco está relacionada à constante elástica k e a massa m do bloco por:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

E o período, está relacionado com a velocidade angular

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Exemplo 1:

Um bloco cuja massa m é igual a 680g está preso a uma mola cuja constante elástica k é 65N/m. O bloco é puxado sobre uma superfície sem atrito por uma distância x=11cm a partir de sua posição de equilíbrio em x=o é solto do repouso em t=0. (a) determine a frequência angular, a frequência e o período do movimento resultante? (b) Qual é a amplitude da oscilação? (c) Qual a velocidade máxima v_m? (d) Qual o módulo da aceleração máxima a_m do bloco?

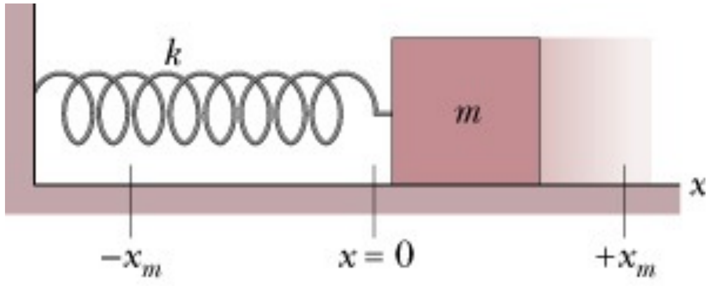
Exemplo 2:
Um objeto que oscila com movimento harmônico simples ao longo do eixo x. Seu deslocamento em relação a origem varia com o tempo de acordo com a equação

$$x = 4m.\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$$

onde t está em segundos e os ângulos entre parênteses estão em radianos.
(a)Determine a amplitude, frequência e período do movimento.
(b)Calcule a velocidade e a aceleração do objeto em qualquer tempo t.

Exemplo 3:

Em t=0 o deslocamento x(0) do bloco de um oscilador linear como na figura é -8,5cm. (leia x(0), x no instante zero.) A velocidade do bloco v(0) nesse instante é -0,92m/s, e a aceleração a(0) é +47m/s^2. a) Qual a frequência angular w desse sistema? b) Quais são os valores das constantes de fase Φ e da amplitude x_m?



Energia no Movimento Harmônico Simples

Num oscilador harmônico a energia mecânica se conserva.

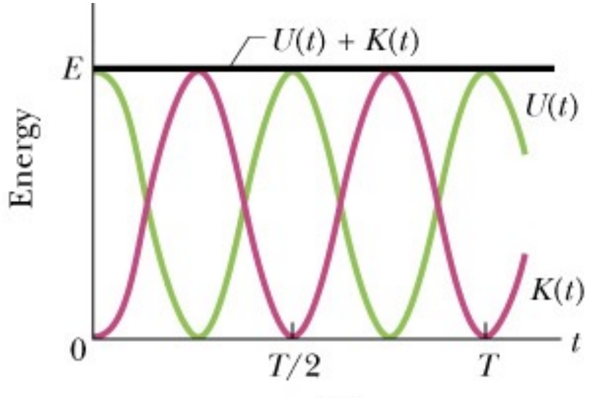
$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_m^2 sen^2(\omega t + \phi)$$

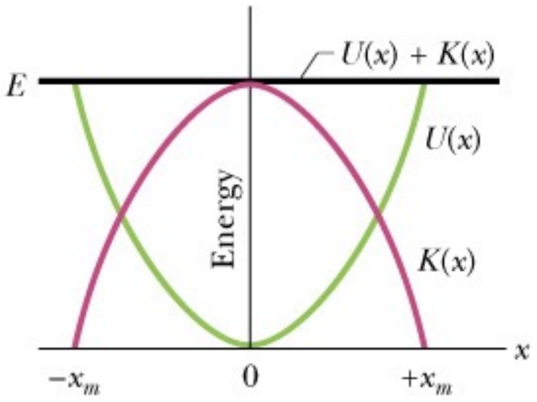
Assim:

$$E = K + U = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kx_m^2 sen^2(\omega t + \phi)$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kx_m^2}$$



(a)



(b)

http://www.fisica.ufpb.br/~romero/objetosaprendizagem/Rived/13Ondas/anima/massa/fis1_ativ3.html

Exemplo 4:

(a)Qual a energia mecânica E do oscilador linear do exercício anterior(Exemplo 1)? (inicialmente, a posição do bloco é $x=11cm$ e sua velocidade é $v=0$. a constante elástica $k=65N/m$. (0,393J)

(b) Qual é a energia potencial U e a energia cinética K do oscilador quando o bloco estiver em $x=1/2\ x_m$? (0,098J e 0,30J)

Pêndulo Simples:

Composto de uma partícula de massa m suspensa em uma das extremidades de um fio inextensível de massa desprezível e comprimento L.

O torque $(\tau = r_{\perp} F)$ pode ser escrito como:

$$\tau = -L(F_g \operatorname{sen}\theta)$$

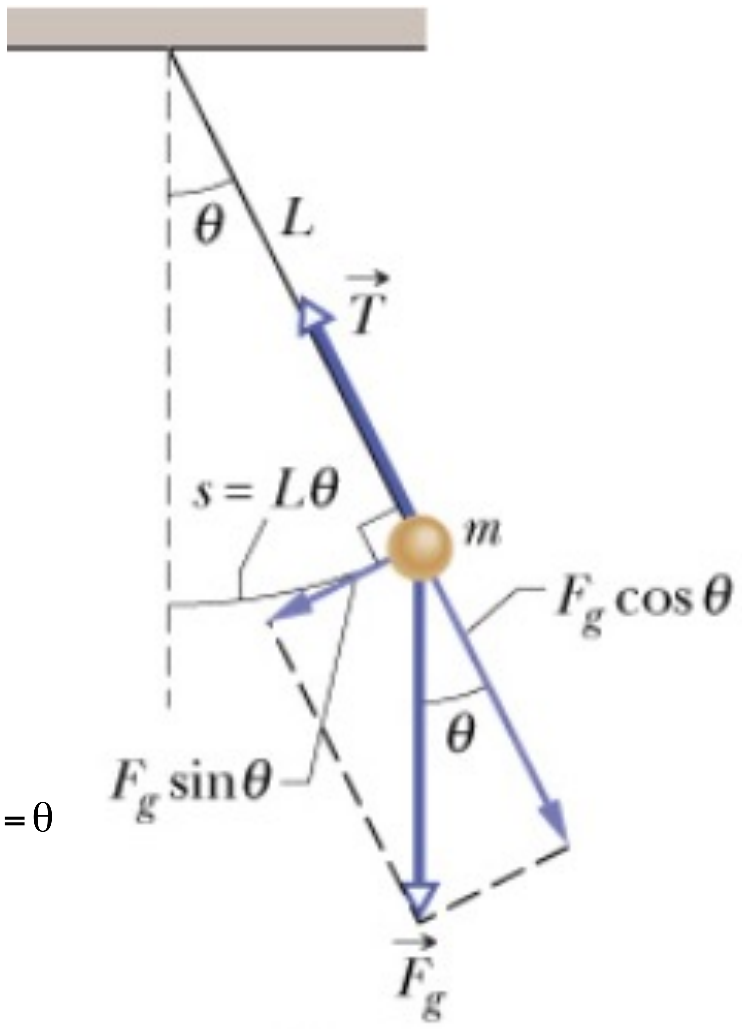
Onde o sinal (-) indica que atua reduzindo θ.

Sabemos que $(\tau = I\alpha)$ o que permite escrever:

$$-L(mg \operatorname{sen}\theta) = I\alpha$$

Supondo o ângulo pequeno, de modo que , $\operatorname{sen}\theta = \theta$ simplificamos a equação para:

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta$$



Comparando $\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta$ com $a(t) = -\omega^2 x(t)$ que tem sua equivalente $\alpha = -\omega^2\theta$ de onde se deduz

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

Usando a expressão $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, teremos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

O momento de inércia da massa do pêndulo, para pequenas amplitudes, é dada por (mL^2) , logo:

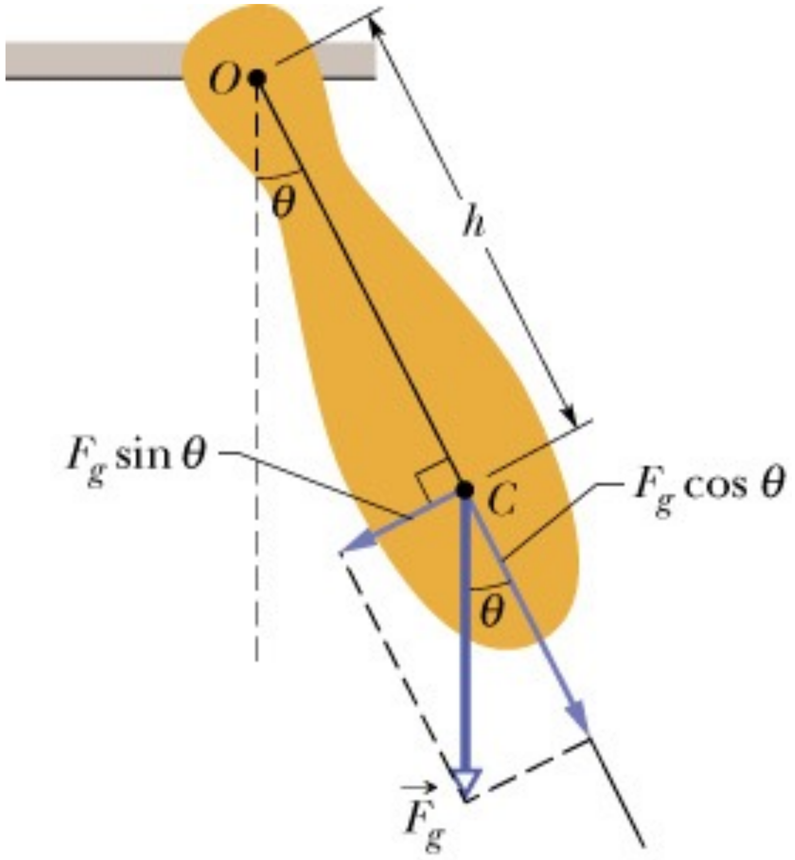
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Pêndulo Físico:

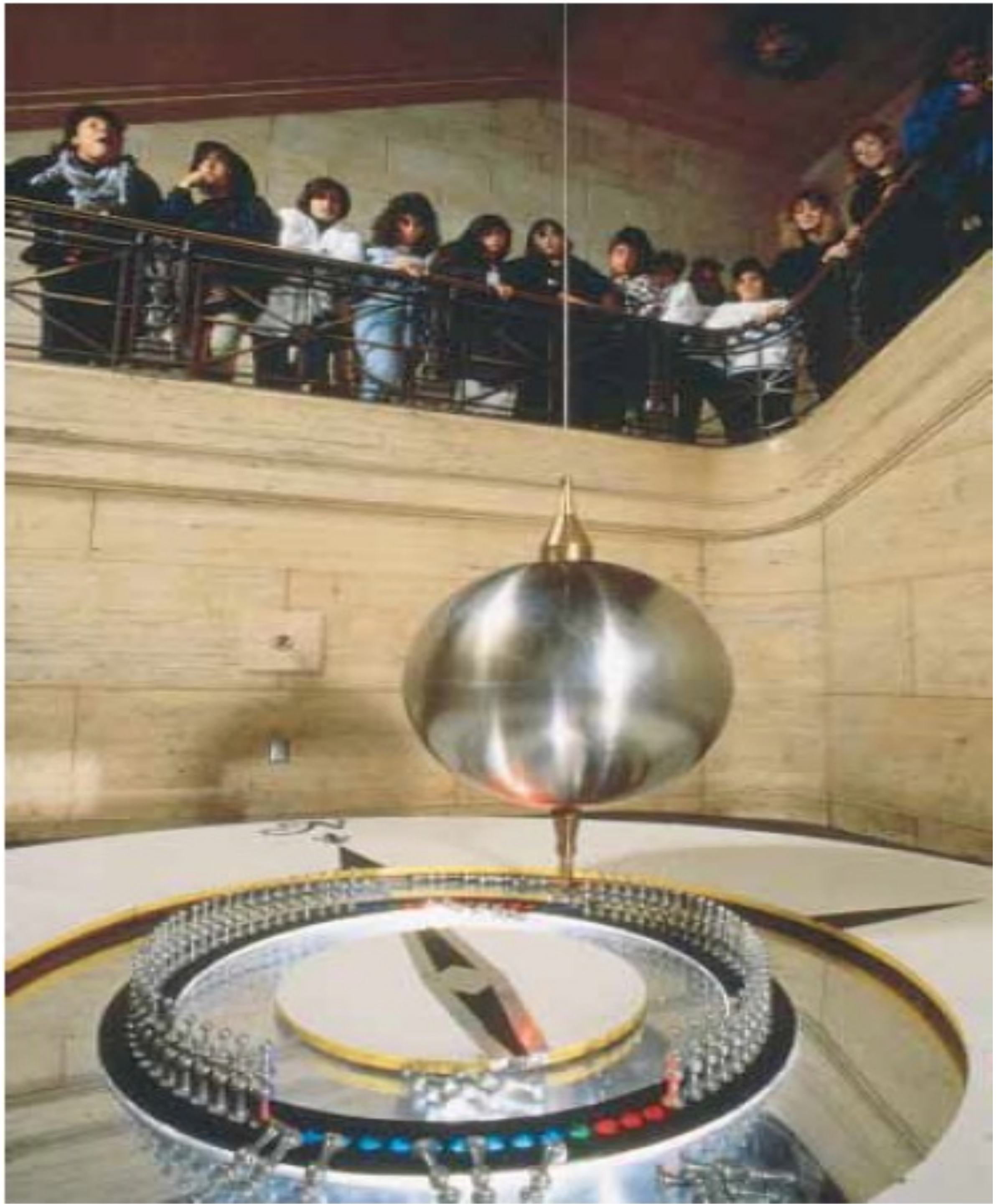
A análise é a mesma do pêndulo simples trocando L por h. Assim:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

Qualquer pêndulo físico que oscila com um período T em torno de um dado ponto pivô O corresponde a um pêndulo simples de comprimento L_0 e com o mesmo período T. O ponto ao longo do pêndulo físico a uma distância L_0 do ponto O é chamado de centro de oscilação do pêndulo físico.

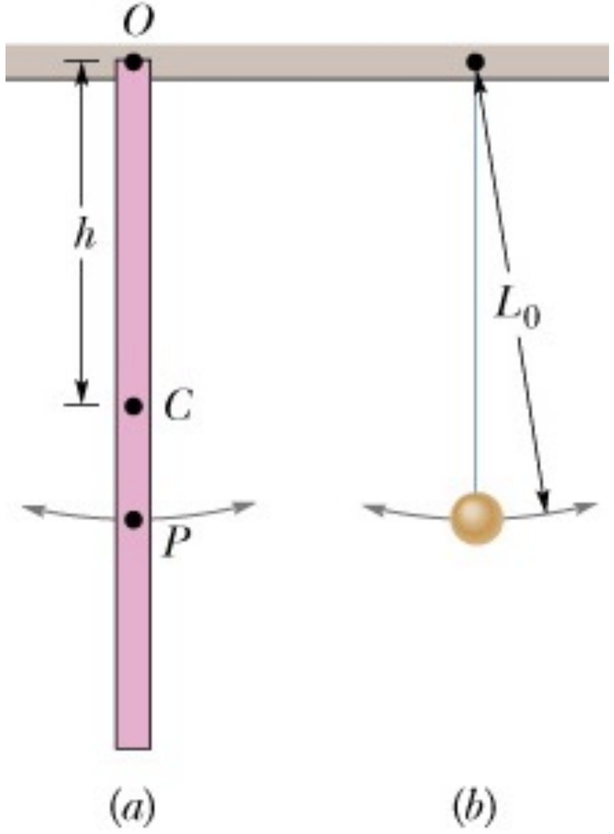


físico francês Jean Bernard Léon Foucault, é uma experiência concebida para demonstrar a rotação da Terra em relação a seu próprio eixo. A primeira demonstração data de 1851, quando um pêndulo de 30 kg foi fixado ao teto do Panteão de Paris por um fio de 67 metros de comprimento.

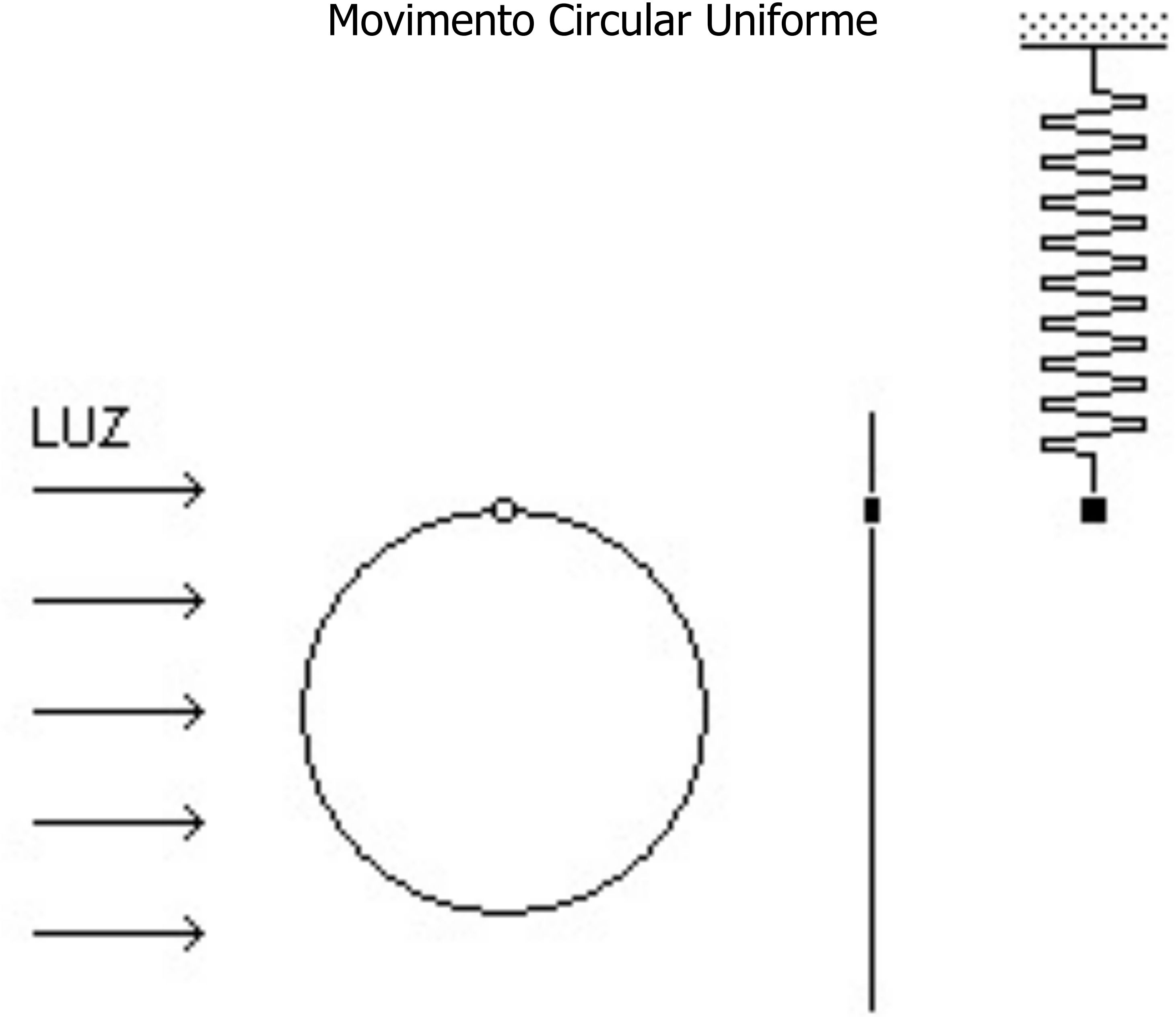


Exemplo 6:
Na figura ao lado, uma régua de um metro oscila em torno de um ponto de pivô em sua extremidade, a uma distância do centro de massa da régua. (a) Qual o período de oscilação do pêndulo? (b) Qual é à distância L_0 entre o ponto pivô da régua e seu centro de oscilação? Use

$$I = \frac{1}{3} m L^2$$



Movimentos Harmônicos Simples e Movimento Circular Uniforme



Movimentos Harmônicos Simples e Movimento Circular Uniforme

O movimento harmônico simples é a simples projeção do movimento circular uniforme sobre um diâmetro do círculo no qual o movimento circular ocorre.

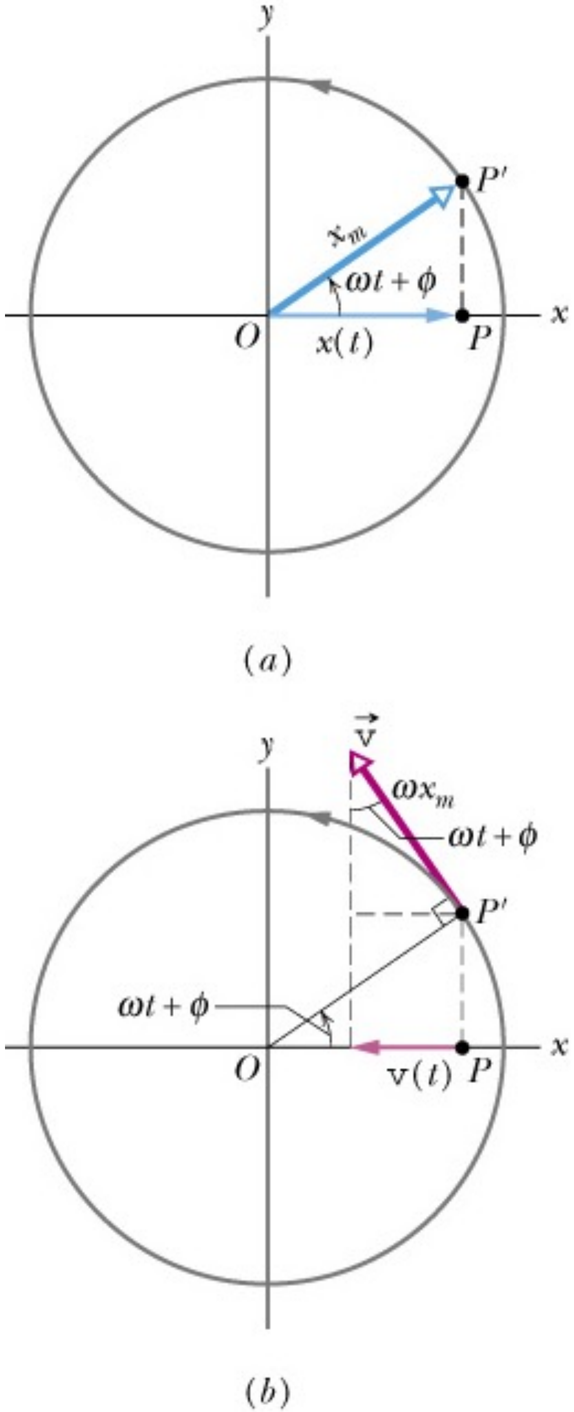
Na figura (a), a projeção da partícula sobre o eixo x é um ponto P, o qual consideramos como uma segunda partícula. A projeção do vetor posição da partícula P′ sobre o eixo x fornece a localização x(t) de P. Assim encontramos

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

que nos leva a velocidade

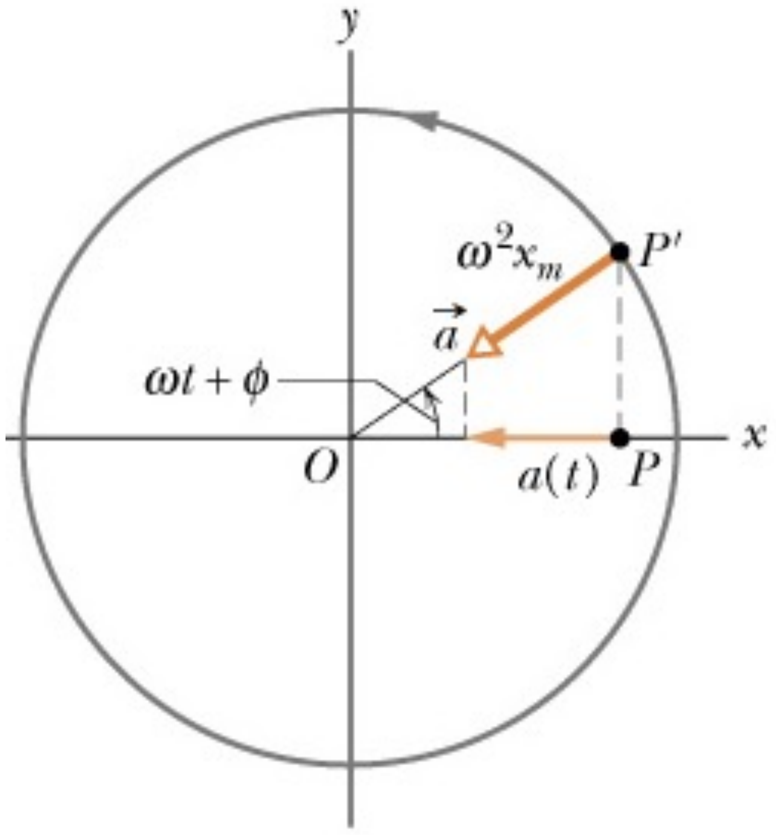
$$v(t) = -\omega x_m sen(\omega t + \phi)$$

https://www.geogebra.org/m/Q9GwZSAK



e aceleração

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$



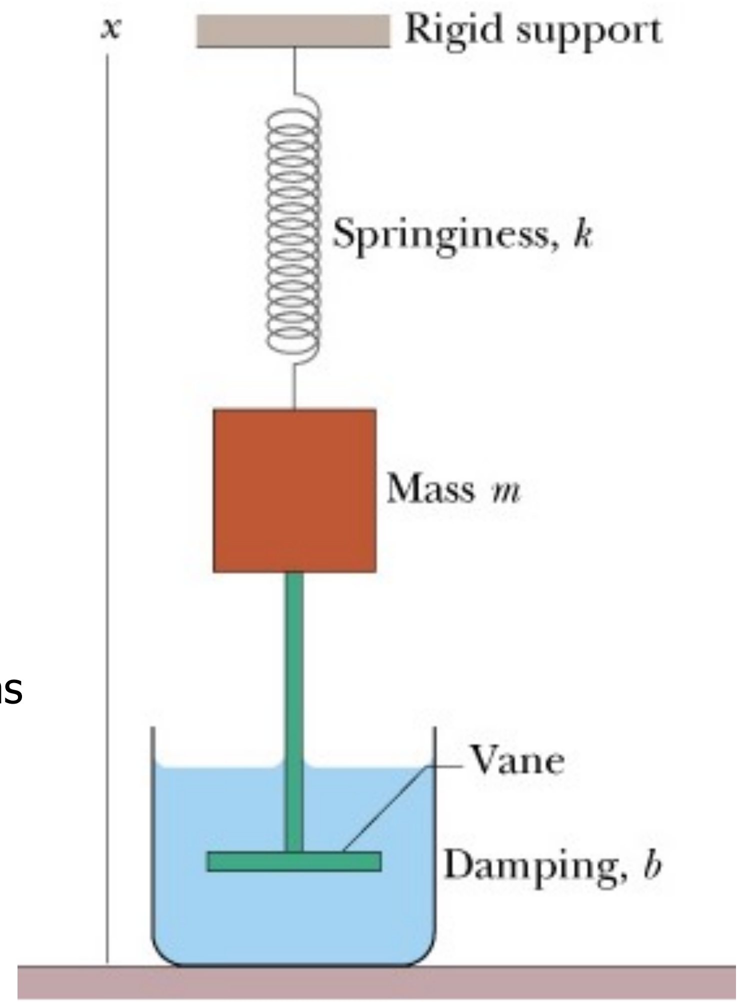
(c)

Movimento Harmônico Simples Amortecido

Quando o movimento de um oscilador é reduzido por uma força externa, dizemos que o oscilador e seu movimento são amortecidos. Suponha que o líquido exerça um força de amortecimento F_a proporcional a velocidade v da pá e do bloco. Então, para componentes ao longo do eixo x temos,

$$F_a = -bv$$

onde é b uma constante de amortecimento que depende das características da pá e do líquido, com unidades kg/s (SI).



A força exercida pela mola sobre o bloco é F_m =-Kx. Supondo a força da gravidade desprezível em relação a, F_a e F_m, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo x.

$$F_{res,x} = -bv - kx = ma$$

Substituindo a por d^2x/dt^2 e v por dx/dt e rearranjando, obtemos a equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

A solução da equação anterior é $$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

A freqüência angular será $$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Se b=0 (sem amortecimento) $$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

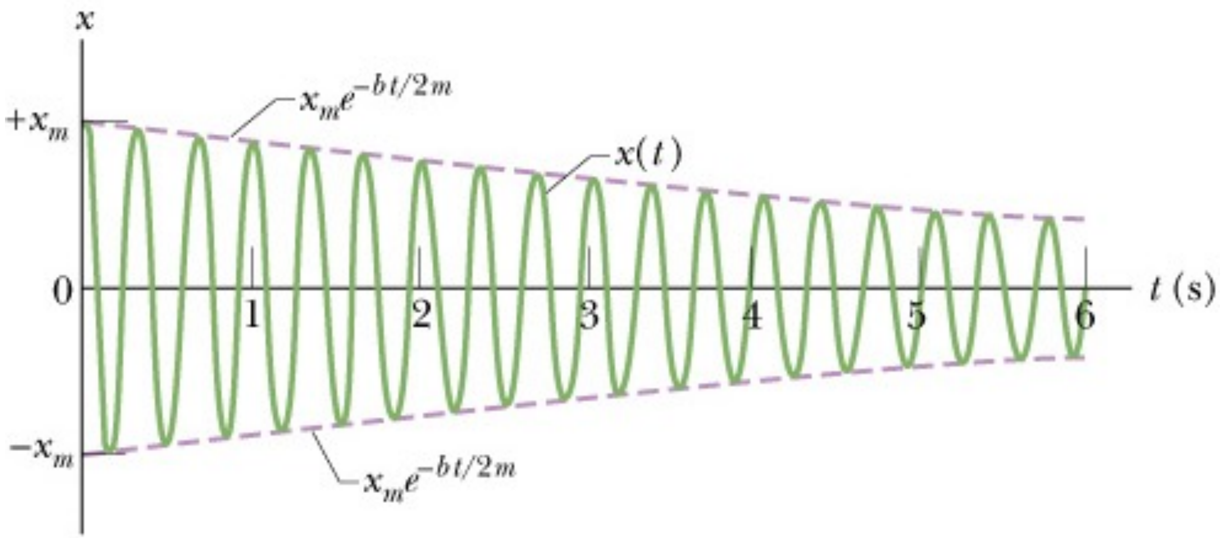
http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/16033/Movimento%20Harmonico%20Simples%20Amortecido.swf?sequence=3

A energia mecânica para o oscilador não amortecido é constante e igual a

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2$$

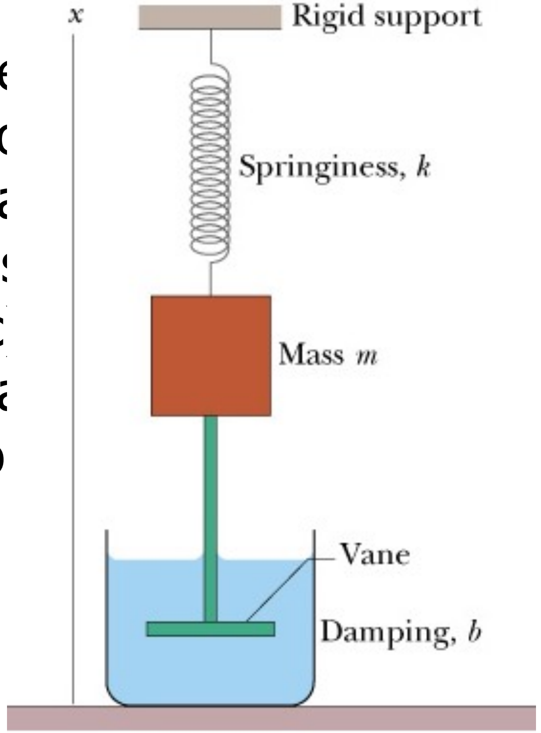
Para o oscilador amortecido, a energia mecânica diminui com o tempo. Se o amortecimento é pequeno, podemos considerar a energia como:

$$E(t) = \frac{1}{2} k x_m^2 e^{-bt/m}$$



Exemplo 7:

Para o oscilador amortecido, considere m=250g, k=85N/m e b=70g/s. (a) Qual é o período do movimento? (b) Quanto tempo leva para a amplitude das oscilações amortecidas cair até a metade do seu valor inicial? (c) Quanto tempo leva para que a energia mecânica se reduza à metade de seu valor inicial? (0,34s; 5,0s; 2,5s)



05 - Um oscilador consiste em um bloco de massa 0,500kg conectado a uma mola. Quando posto em oscilação com amplitude de 35,0cm, o oscilador repete seu movimento a cada 0,500s. Encontre (a) o período, (b) a frequência, (c) a frequência angular, (d) a constante elástica, (e) a velocidade máxima e (f) a intensidade da força máxima que a mola exerce sobre o bloco. a) 0,5s, b)2Hz, c)12,6rad/s, d)79N/m, e)4,4m/s e f)27,6N

33 - Um objeto de 5,00kg encontre-se sobre uma superfície horizontal sem atrito ligado a uma mola com k=1000N/m. O objeto é deslocado horizontalmente 50,0cm a partir de sua posição de equilíbrio e lhe é dada uma velocidade inicial de 10,0 m/s direcionada de volta à posição de equilíbrio. Quais são (a) a frequência do movimento, (b) a energia potencial inicial do sistema bloco-mola, (c) a energia cinética inicial e (d) a amplitude do movimento? a) 2,25Hz, b)125J, c)250J d) 86,6cm.