

# Cap. 16 – Ondas I

Prof. Oscar 2º. Semestre de 2013

## 16.1 Introdução

Ondas são perturbações que se propagam transportando energia. Desta forma, uma música, a imagem numa tela de tv, a comunicações utilizando celulares, etc, dependem da produção, transmissão e recepção de uma onda. Este capítulo se concentra nas ondas progressivas ao longo de uma corda esticada, como a de um violão.

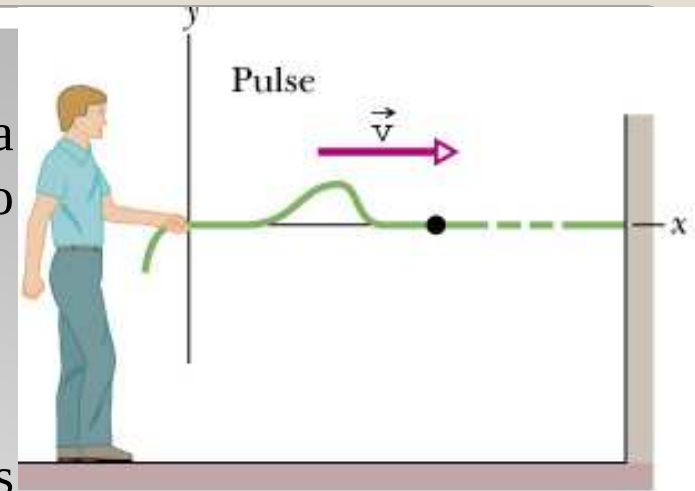
## 16.2 Tipos de Ondas

As ondas são de três tipos:

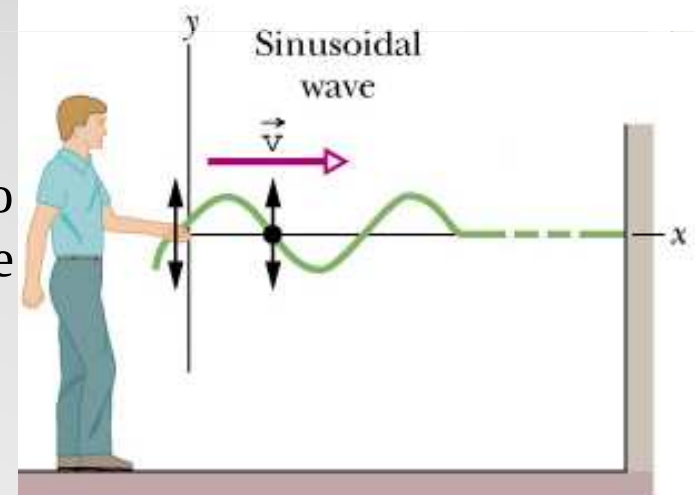
- **Ondas mecânicas** – Precisam de um meio para se propagar (ondas na água, ondas sonoras, ondas sísmicas, ondas numa corda).
- **Ondas eletromagnéticas** – Não requerem um meio material para se propagarem (luz visível, ultravioleta, ondas de rádio, televisão, raio x, radar, celular, etc.). No vácuo sua velocidade é  $c = 299.792.458 \text{ m/s}$ .
- **Ondas de matéria** – Associadas a elétrons, prótons e outras partículas elementares, e mesmo com átomos e moléculas.

### 16.3 Ondas Transversais e longitudinais

- **Pulso** – (a) cada ponto do meio (corda) vibra com a mesma amplitude, no sentido perpendicular ao deslocamento da onda.
- **Trem de ondas** – (b) sucessivos pulsos produzidos com periodicidade formam uma onda senoidal.
- **Onda Transversal** – cada elemento do meio oscila perpendicularmente à direção de propagação da onda.



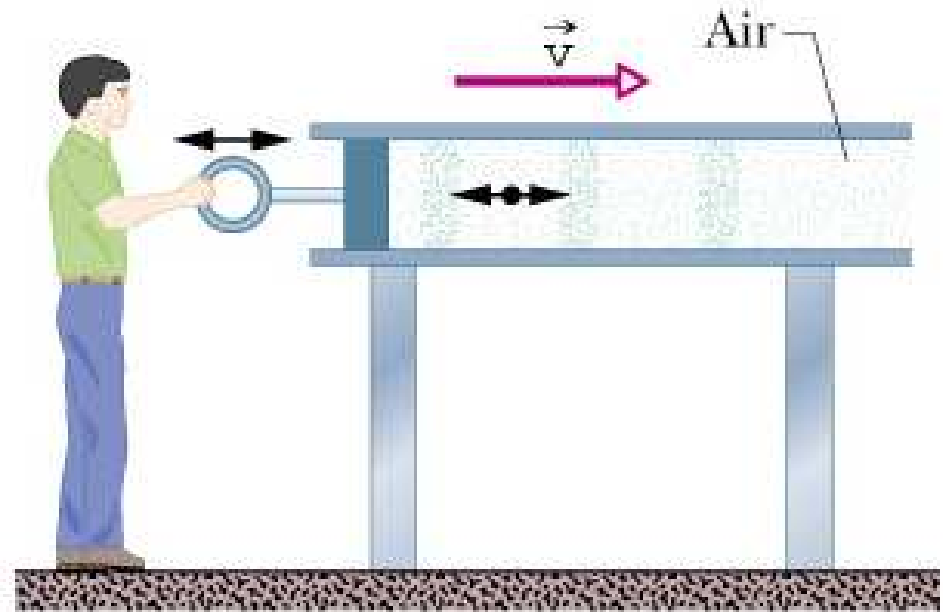
(a)



(b)

- **Onda Longitudinal** - os elementos do meio oscilam na mesma direção de propagação da onda.

O movimento de vai e vem do pistão resulta numa onda longitudinal que se propaga ao longo do tubo.



**Tanto as ondas Transversais quanto as Longitudinais são chamadas de ondas progressivas.**

## 16.4 Comprimento de Onda e Frequência

Uma onda fica completamente descrita pela equação abaixo. Para uma corda, esta equação pode ser usada para encontrar os **deslocamentos** de todos os elementos da corda em função do tempo.

- **Amplitude**  $y_m$  – é o módulo do deslocamento máximo dos elementos a partir de suas posições de equilíbrio enquanto a onda passa através deles.

$$\underbrace{y(x, t)}_{\text{Deslocamento}} = \underbrace{y_m}_{\text{Amplitude}} \overbrace{\text{sen} \left( \underbrace{k}_{\substack{\text{Num.} \\ \text{de onda}}} x - \omega t \right)}^{\text{termo de oscilação}} \underbrace{\quad}_{\text{Fase}}$$

**Fase** ( $kx - \omega t$ ) da onda é o argumento do seno da equação anterior. Enquanto a onda passa por um elemento da corda em uma posição particular  $x$ , a fase varia linearmente com o tempo  $t$ .

**Comprimento de Onda**  $\lambda$  é a distância entre repetições da forma da onda.

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

Em  $t = 0$ ,  $x = x_1$  e  $y(x,0) = y_m \sin(kx_1)$

Em  $x = x_1 + \lambda$ , **O deslocamento  $y$  é o mesmo!**

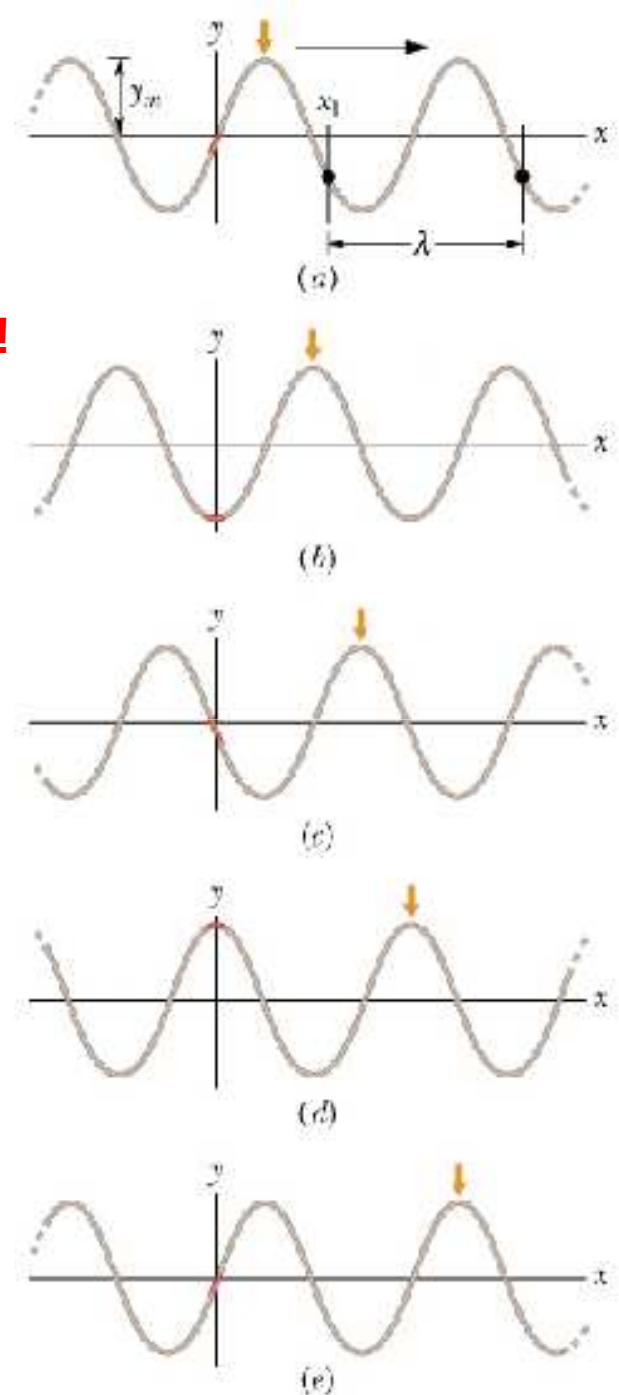
$$y_m \sin(kx_1) = y_m \sin(kx_1 + k\lambda)$$

Onde  $k\lambda = 2\pi$

**Número de Onda  $k$**

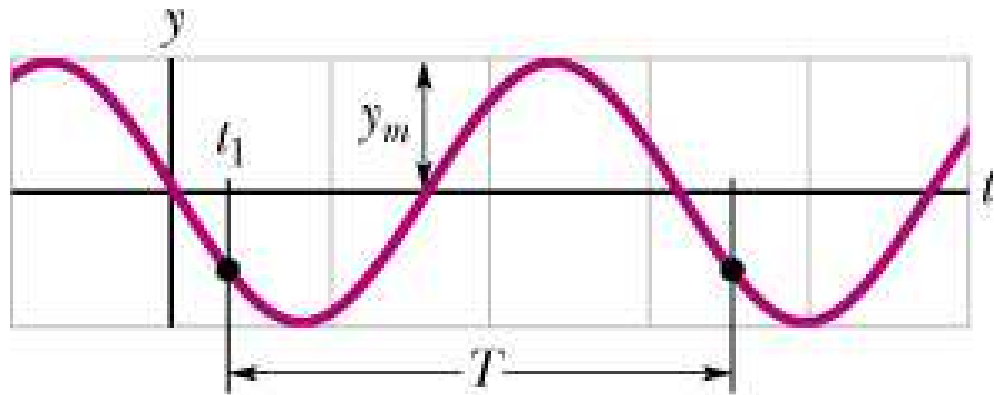
Unidade no SI é radiano por metro  
rad/m, dado por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



## ***Período, Frequência Angular e Frequência***

**Período (T)** de oscilação de uma onda é o tempo que qualquer elemento da corda leva para realizar uma oscilação completa.



**Frequência Angular ( $\omega$ )** é a rapidez com que o ponto realiza o ciclo, dada em radiano por segundo.

**Frequência (f)** de uma onda é o número de oscilações por unidade de tempo (1/s=Hz). Relaciona-se com o período e frequência angular por:

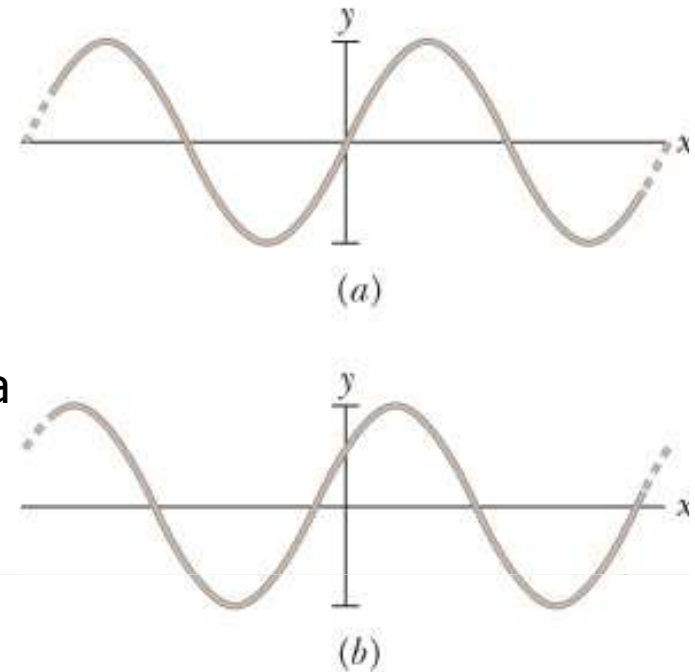
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

**Constante de Fase:** Quando uma onda progressiva senoidal é expressa pela função de onda  $y(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$ , a forma da onda pode ser descrita conforme a figura (a). Note que  $x=0$ ,  $y=0$  e sua inclinação é máxima positiva. Se inserirmos uma constante de fase, a função de onda assume a forma:

$$y(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

No caso da figura,

$$\phi = +\pi / 4$$





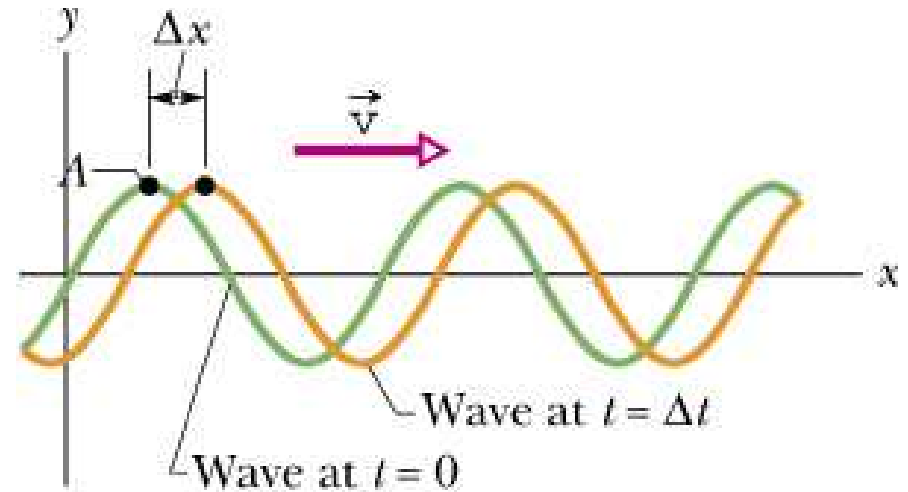
## 16.5 A Velocidade de uma Onda Progressiva

A figura ao lado mostra dois instantâneos da onda separados por um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ . Desta forma, a razão  $\Delta x / \Delta t$  ou no limite diferencial  $dx/dt$  é a velocidade da onda  $v$ . Se o ponto  $A$  preserva seu deslocamento enquanto ele se move, a fase na equação de onda determinando este deslocamento deve permanecer constante:

$$kx - \omega t = \text{constante}$$

Derivando este argumento em relação a  $t$ , encontramos a velocidade  $v$  da onda,

$$k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{k}$$



Como já foi definido,  $k = 2\pi / \lambda$  e  $\omega = 2\pi / T$ , podemos escrever a

velocidade da onda como:  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$   $v = \lambda f$

Quando a onda se mover no sentido negativo de  $x$ , temos

$$kx + \omega t = \text{constante}$$

Desta forma a equação da onda será escrita por

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx + \omega t)$$

que derivada, leva a

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}$$

**Exemplo 1:**

Uma onda propagando ao longo de uma corda é descrita por

$$y(x,t) = 0,00327 \text{sen}(72,1x - 2,72t),$$

na qual as constantes numéricas estão em unidades do SI. **(a)** Qual é a amplitude desta onda? **(b)** quais são os comprimentos de onda, período e a frequência desta onda? **(c)** Qual é a velocidade desta onda? **(d)** Qual o deslocamento  $y$  em  $x=22,5\text{cm}$  e  $t=18,9\text{s}$ ? (0,00327m ; 0,0871m ; 2,31s ; 0,433Hz; 0,0377m/s; 0,00191m)

**Exemplo 2:**

No exemplo anterior letra d, mostramos que em  $t=18,9\text{s}$  o deslocamento transversal de  $y$  do elemento da corda situado em  $x=0,225\text{ m}$  provocado pela onda da equação do exercício anterior é  $1,91\text{ mm}$ .

- a) Qual é a velocidade transversal  $u$  desse elemento da corda nesse instante?
- b) Qual a aceleração  $a_y$  do mesmo elemento nesse instante?

## 16.6 Velocidade da Onda em uma Corda Esticada

A velocidade da onda está relacionada com o comprimento de onda e com a frequência pela equação  $v = \lambda f$ , mas ela é determinada pelas propriedades do meio como a densidade linear de massa  $\mu$  e a tensão  $\tau$  da corda.

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

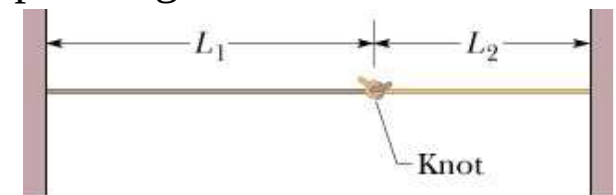
$$\mu = \frac{m}{l} \text{ (massa por comprimento de corda).}$$

### Exemplo 3:

Na figura, duas cordas foram amarradas uma na outra com um nó e depois esticadas entre dois suportes rígidos. As cordas têm densidades lineares  $\mu_1 = 1,4 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$  e  $\mu_2 = 2,8 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$ . Seus comprimentos são  $L_1 = 3\text{m}$  e  $L_2 = 2\text{m}$ , e a corda 1 está submetida a uma tensão de 400N.

Simultaneamente, um pulso é enviado a partir da extremidade do suporte rígido de cada corda em direção ao nó. Qual pulso alcançará o nó primeiro?

(determine o tempo que cada pulso leva para percorrer cada corda)

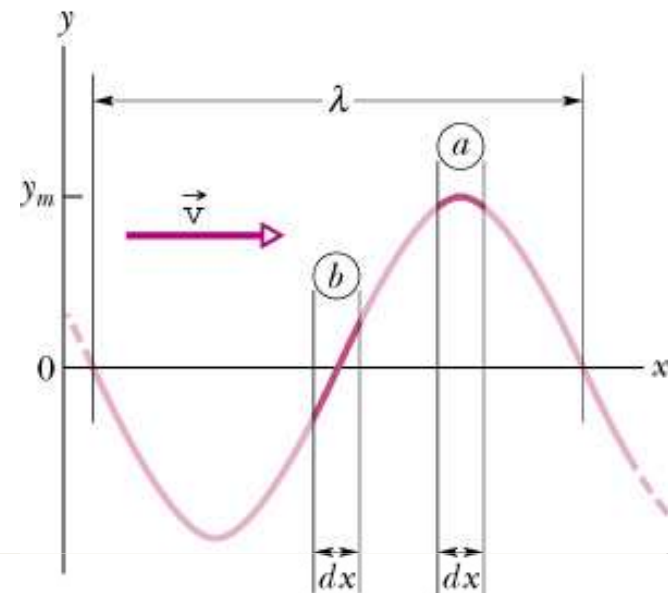


## 16.7 Energia e Potência de uma Onda Progressiva em uma Corda

Quando fornecemos energia para uma corda esticada, esta transporta a energia nas formas de energia cinética e energia potencial elástica.

**Energia Cinética** - considerando um elemento de massa  $dm$  da corda, quando ele passa por  $y=0$  (b) sua velocidade é máxima (só energia cinética) e quando passa pela posição  $y=y_m$  (a), sua energia cinética é nula.

**Energia Potencial Elástica** – Quando o elemento de massa oscila, seu comprimento varia para que possa assumir a forma da senoide. A energia potencial está associada a esta variação de comprimento.



**Transporte de Energia** -- Quando a onda se move para seções que estavam anteriormente em repouso, energia é transferida para estas novas seções.

### **A Taxa de Transmissão da Energia**

A energia cinética  **$dK$**  associada a um elemento de massa  **$dm$**  é dada por

$$dK = \frac{1}{2} dm u^2$$

onde  $u$  é a velocidade transversal do elemento oscilante da corda derivamos a equação da posição do elemento.

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

Usando esta relação e fazendo  **$dm = \mu dx$** , reescrevemos,

$$dK = \frac{1}{2} dm u^2$$

$$dK = \frac{1}{2} (\mu dx) (-\omega y_m)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Dividindo esta equação por  $dt$ , temos:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \mu \nu \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

A taxa média com que a energia cinética é transportada é

$$\left( \frac{dK}{dt} \right)_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \mu \nu \omega^2 y_m^2 [\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{méd}}$$

Para um número inteiro de comprimentos de onda,  $[\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{méd}} = 1/2$

o que nos leva a,

$$\left( \frac{dK}{dt} \right)_{\text{méd}} = \frac{1}{4} \mu \nu \omega^2 y_m^2$$

A potência média, que é a taxa média com que a energia em ambas as formas é transmitida pela onda é,

$$P_{\text{méd}} = 2 \left( \frac{dK}{dt} \right)_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \mu \nu \omega^2 y_m^2$$



**Exemplo 4:**

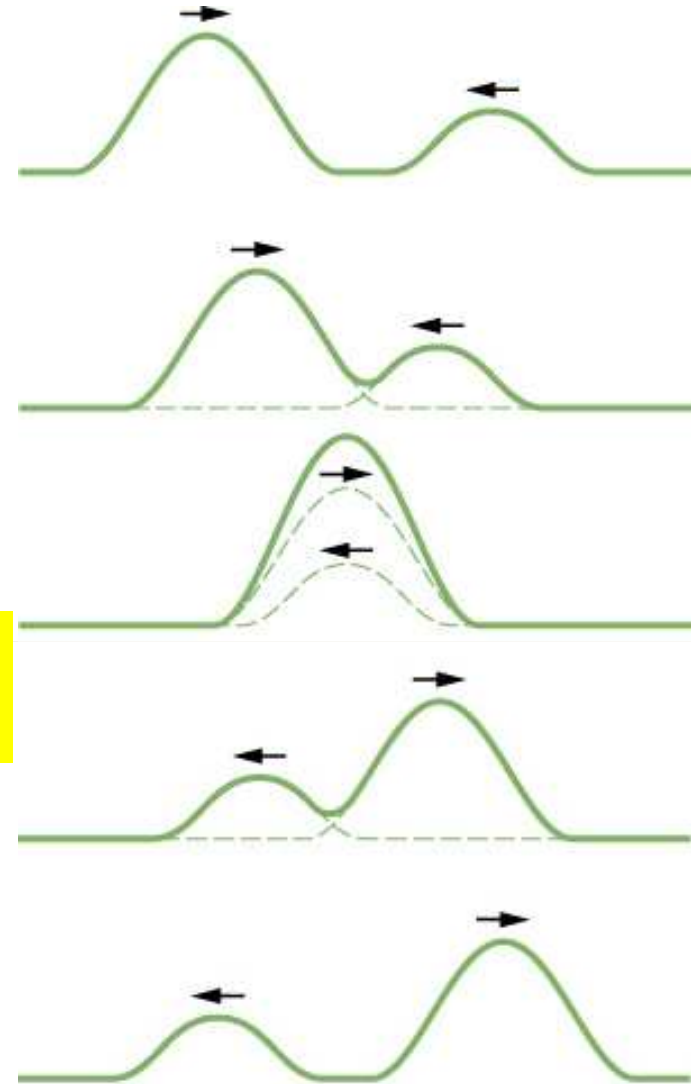
Uma corda esticada possui densidade linear  $\mu = 525\text{g/m}$  e está sujeita a uma tensão **45N**. Enviamos uma onda senoidal com frequência **120Hz** e amplitude  $y_m=8,5\text{mm}$  ao longo da corda. Com que taxa média a onda transporta energia? **R=100w**

## 16.9 O Princípio da Superposição para Ondas

Suponha que duas ondas se propagam simultaneamente ao longo da mesma corda esticada.

Sejam  $y_1(x,t)$  e  $y_2(x,t)$  os deslocamentos que a corda sofreria se cada onda se propagasse sozinha. Na superposição,

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$



### 16.10 Interferência de Ondas

*Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda se propagam no mesmo sentido ao longo de uma corda esticada, elas interferem para produzir uma onda resultante senoidal se propagando naquele sentido.*

Sejam duas ondas propagando-se ao longo de uma corda esticada dado por:

$$y_1(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad y_2(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

Estas ondas têm igual  $\omega$ ,  $f$ ,  $k$  e  $y_m$ , deslocando-se para o sentido positivo de  $x$ , com a mesma velocidade, diferindo apenas por um ângulo de fase  $\Phi$ .

Somando as ondas temos:

$$y'(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) + y_m \text{sen}(kx - \omega t + \phi)$$

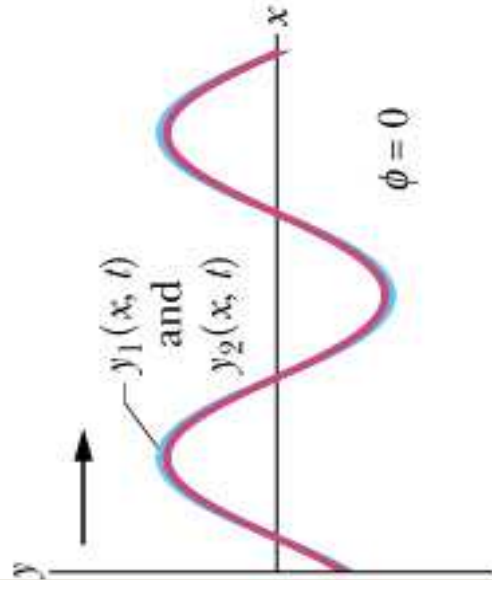
Matematicamente,

$$\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta = 2 \text{sen} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$$

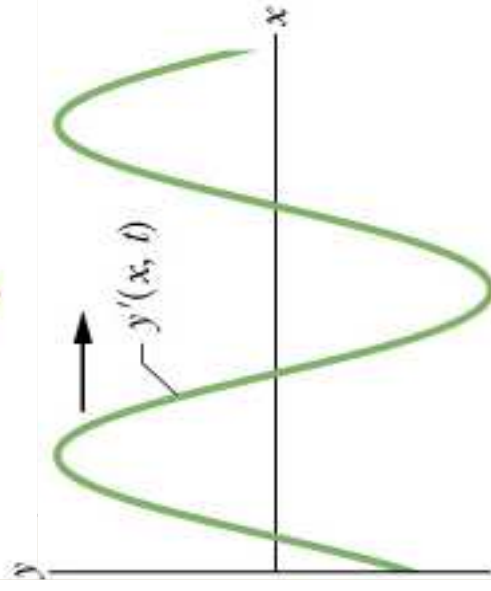
que aplicada a onda resultante tem-se:

$$\overbrace{y'(x,t)}^{\text{Deslocamento}} = \underbrace{[2y_m \cos \frac{1}{2}\phi]}_{\text{termo de amplitude}} \underbrace{\text{sen}(kx - \omega t + \phi)}_{\text{Termo oscilatório}}$$

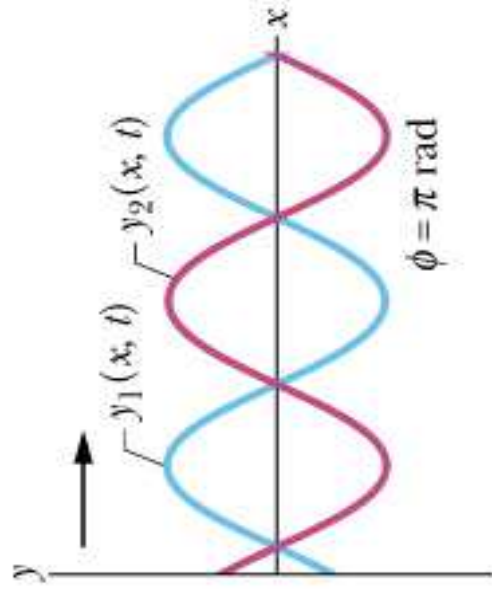
**A seguir alguns exemplos de interferência de duas ondas.**



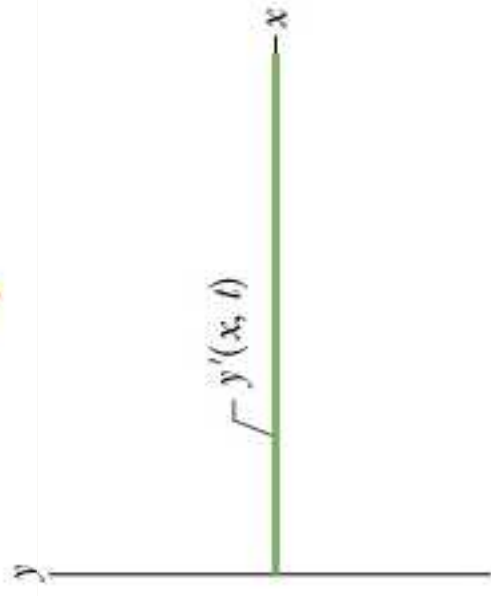
(a)



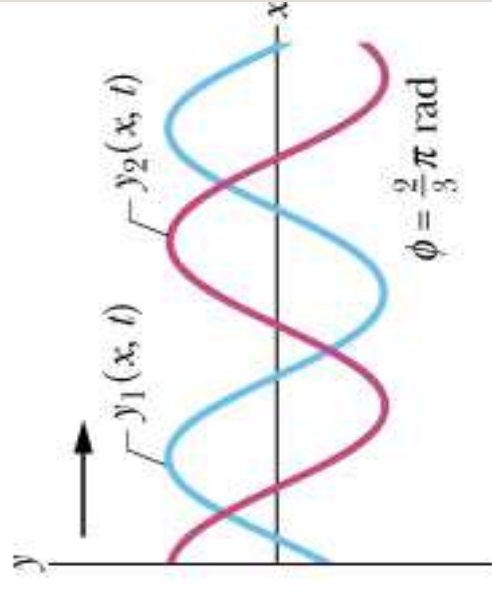
(d)



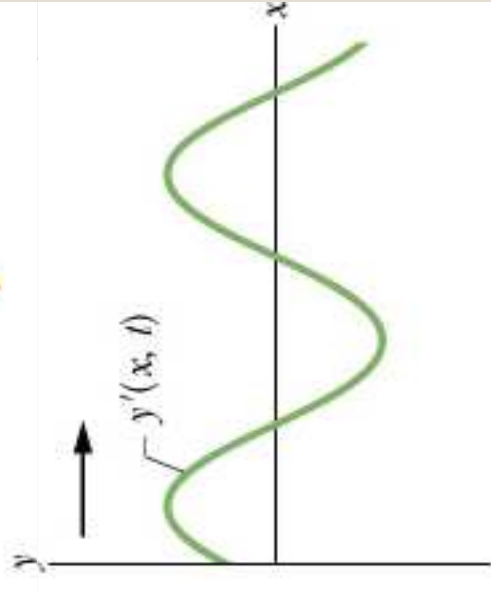
(b)



(e)



(c)



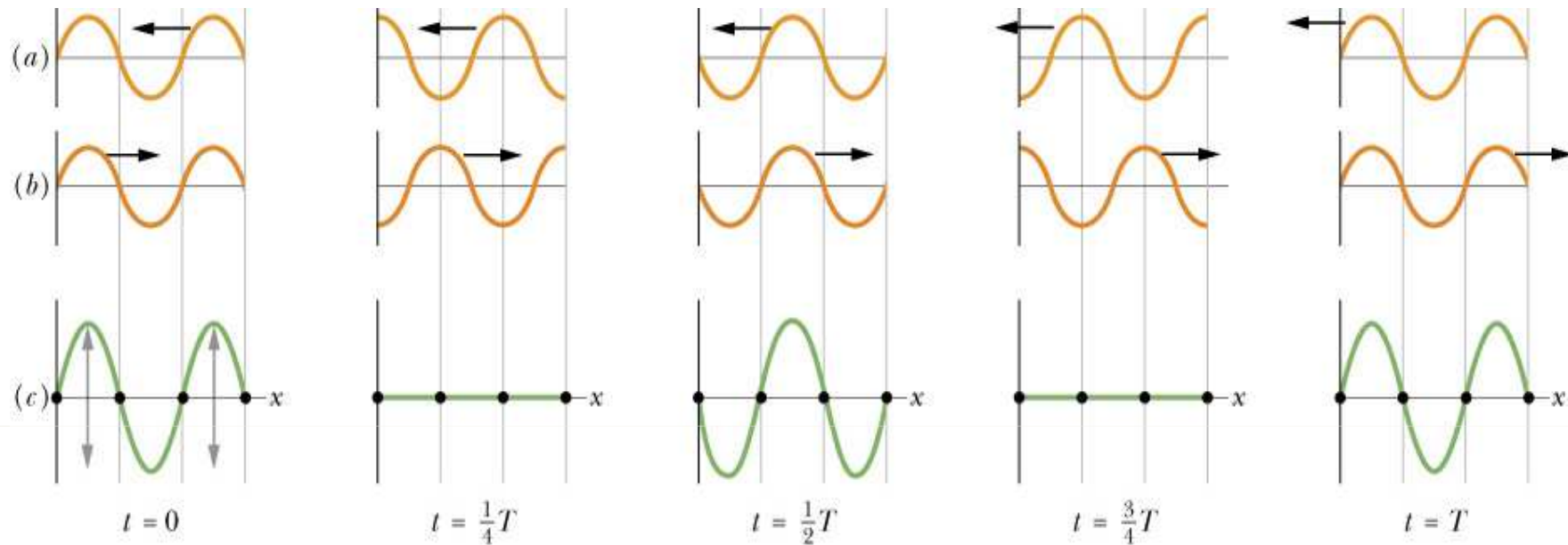
(f)

**Exercício 5:**

Duas ondas senoidais idênticas, se propagando no mesmo sentido ao longo de uma corda esticada, interferem uma na outra. A amplitude de cada onda é 9,8mm, e a diferença de fase  $\Phi$  entre elas é  $100^\circ$ . (a) Qual a amplitude  $y'_m$  da onda resultante? (b) Que diferença de fase, em radianos dará à onda resultante uma amplitude de 4,9mm?

## 16.12 Ondas Estacionárias

Se duas ondas senoidais de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda se propagam em sentidos opostos ao longo de uma corda esticada, sua interferência mútua produz uma onda estacionária.



Uma característica marcante na onda resultante é que existem lugares ao longo da corda, chamados **nós**, onde a corda nunca se move. No ponto médio entre os nós estão os **antinós (ventres)**, onde a amplitude da onda resultante é máxima. Ondas com esta configuração são chamadas de **ondas estacionárias**, porque a forma da onda não se move para a direita ou para a esquerda.

Assim:  $y_1(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t)$        $y_2(x, t) = y_m \text{sen}(kx + \omega t)$

$$y'(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) + y_m \text{sen}(kx + \omega t)$$

Aplicando a relação trigonométrica

$$\text{sen} \alpha + \text{sen} \beta = 2 \text{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

temos.

*Deslocamento*

$$y'(x, t) = \underbrace{[2y_m \sin kx]}_{\text{termo de amplitude}} \underbrace{\cos(\omega t)}_{\text{Termo oscilatório}}$$

*termo de amplitude* *Termo oscilatório*



Na onda estacionária, a amplitude de oscilação de cada elemento da corda varia com a posição  $x$ .

A amplitude é nula para valores de  $kx$  que fornecem  $\text{sen } kx = 0$  ou seja:

$$kx = n\pi \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A posição dos nós é obtida fazendo-se  $k = 2\pi / \lambda$  e reordenando leva a:

$$x = n \frac{\lambda}{2} \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{nós})$$

A onda estacionária terá uma amplitude máxima quando  $|\text{sen } kx| = 1$ , ou seja:

$$kx = \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Substituindo  $k = 2\pi / \lambda$  e reordenando tem-se  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$  para

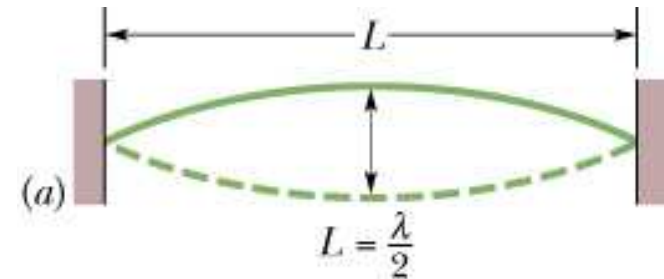
$$n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{antinós})$$

### 16.13 Ondas Estacionárias e Ressonância

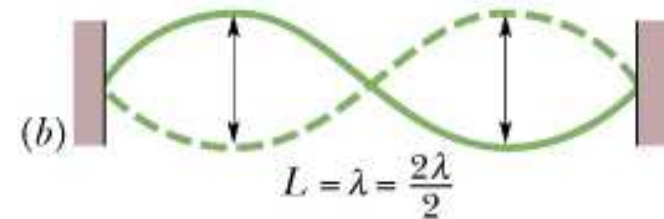
Numa corda de violão, por exemplo, as ondas que se propagam para a direita na corda, se superpõe com as ondas que se propagam para a esquerda e o resultado é uma onda estacionária na corda.

A ressonância pode produzir padrões de onda estacionária na corda que representam os harmônicos de vibração da corda.

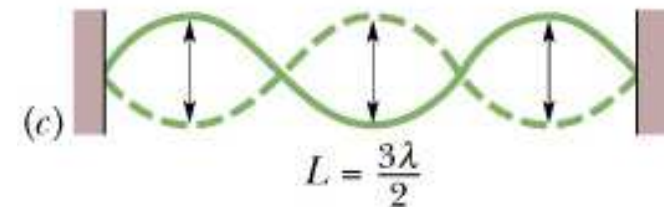
Para o primeiro padrão (a) de vibração da corda (1º harmônico), o comprimento da corda equivale a meio comprimento de onda (um ventre).



O segundo padrão (b) de vibração (2º harmônico), tem exatamente um comprimento de onda (dois ventres).



O terceiro padrão (c) de vibração (3º harmônico), tem um comprimento de onda e meio (três ventres).



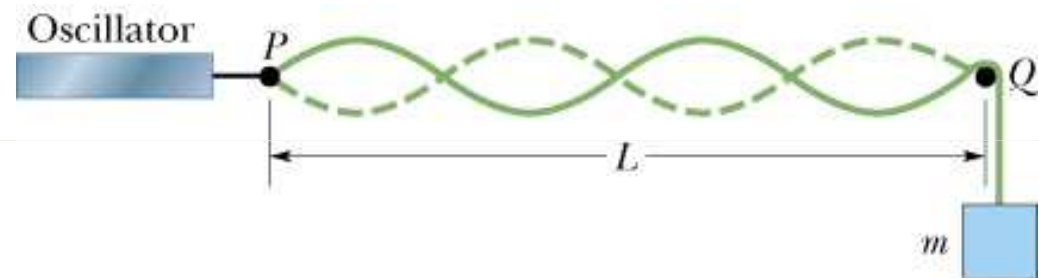
Assim, uma onda estacionária pode ser excitada em uma corda de comprimento  $L$  por uma onda com um comprimento de onda igual a um dos valores:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{número de harmônico})$$

As frequências de ressonância que correspondem a esses comprimentos de onda seguem de:

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

**Exercício 7:** Na figura, uma corda, ligada a um oscilador senoidal em P e deslizando sobre um suporte em Q, está esticada por um bloco de massa  $m$ . A separação  $L$  entre P e Q é  $1,2\text{m}$ , a densidade linear da corda é  $1,6\text{ g/m}$ , e a frequência  $f$  do oscilador está fixada em  $120\text{Hz}$ . A amplitude do movimento em P é suficientemente pequena para que este ponto seja considerado um nó. Também existe um nó em Q. (a) Que massa  $m$  permitiria ao oscilador excitar o quarto harmônico da corda? (b) Que modo de onda estacionária é excitado se  $m=1\text{kg}$ ?



**Exemplo 8:** A fig. mostra a oscilação ressonante de uma corda de massa  $m=2,5\text{g}$  e comprimento  $L = 0,8\text{m}$  sob uma tensão  $325\text{N}$ . Qual é o comprimento de onda das ondas transversais responsáveis pela onda estacionária mostrada na figura e qual é o número harmônico  $n$ ? Qual é a frequência  $f$  das ondas transversais e das oscilações dos elementos da corda?