NOTAS DE AULA

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Matrizes e Determinantes

Professor: Luiz Fernando Nunes, Dr.

2019/Sem_01

Índice

1 Matrizes e Determinantes

1.1 Matrizes

1.1.1 Noção de matriz:

Uma matriz é uma tabela retangular de elementos dispostos em linhas e colunas.

1.1.2 Representação

Uma matriz com *m* linhas e *n* colunas será indicada por:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

os elementos são indicados por a_{ij}, onde $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Se não existirem dúvidas quanto à quantidade de linhas e colunas de uma matriz, podemos indicá-la apenas por letras latinas maiúsculas *A*, *B*, *C*, *D*, ... , omitindo os índices *m* e *n*.

O símbolo $M_{m\times n}(\Re)$ indicará o conjunto de todas as matrizes de ordem $m\times n$ de elementos reais.

Exemplos:

1) Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então temos que: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = -2$, $a_{31} = 5$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = 3$.

2) Se $B = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & \sqrt{2} & \pi \end{bmatrix}$, então temos que: $b_{11} = 3$, $b_{12} = -9$, $b_{13} = 2$, $b_{14} = 5$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = 7$, $b_{23} = \sqrt{2}$, $b_{24} = \pi$.

3) Se $C = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/2 \\ 4 & -3 \\ -7 & 18 \end{bmatrix}$, então temos que: $c_{11} = \frac{2}{3}$, $c_{12} = -\frac{1}{2}$, $c_{21} = 4$, $c_{22} = -3$, $c_{31} = -7$, $c_{32} = 18$.

1.1.3 Igualdade de matrizes

Duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{r\times s}$, com elementos do tipo a_{ij} e b_{ij}, respectivamente, são iguais, se e somente se: $\begin{cases} m = r \\ n = s \\ a_{ij} = b_{ij} \ \forall i, j \end{cases}$

Neste caso escrevemos $A = B$

1.1.4 Tipos Especiais de Matrizes

Matriz Quadrada

É aquela onde o número de linhas é igual ao número de colunas, isto é, $m = n$.

Exemplos:

1) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=[8]$ e $C=\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 3 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$.

Matriz Nula

É aquela em que todos os elementos são iguais a zero, isto é, $a_{ij}=0$ para todo i e j.

Exemplos:

1) $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matriz Linha

É aquela onde $m = 1$.

Exemplos:

1) $A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz Coluna

É aquela onde $n = 1$.

Exemplos:

1) $A=\begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Matriz Diagonal

É uma matriz quadrada ($m = n$) onde $a_{ij}=0$, para $i \neq j$.

Exemplos:

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz Identidade

É uma matriz diagonal onde $\begin{cases} a_{ij} = 0 & para \quad i \neq j \; e \\ a_{ij} = 1 & para \quad i = j \end{cases}$

Muitas vezes a matriz identidade de ordem *n* é indicada por $I_{n \times n}$ ou apenas I_n.

Exemplos:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Triangular Superior

É uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i > j$.

Exemplos:

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Triangular Inferior

É uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Exemplos:

1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ \pi & 7 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.1.5 Operações com matrizes

Adição

Dadas duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$, com elementos do tipo a_{ij} e b_{ij}, respectivamente, então: $A + B$ é a matriz com os elementos $a_{ij} + b_{ij}$, isto é, soma-se os elementos nas posições correspondentes.

Observação: *A* e *B* devem ser de mesma ordem.

Exemplo:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 10 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

Propriedades da Adição de Matrizes

i) Associatividade: $A+(B+C)=(A+B)+C,\ \forall A,B,C\in M_{m\times n}(\Re)$

ii) Comutatividade: $A+B=B+A,\ \forall A,B\in M_{m\times n}(\Re)$

iii) Elemento Neutro: $A+0=A$, onde *0* denota a matriz nula $m\times n$, $\forall A\in M_{m\times n}(\Re)$

iv) Oposto: Dada $A\in M_{m\times n}(\Re)$, existe a matriz $(-A)\in M_{m\times n}(\Re)$, tal que $A+(-A)=0$

Multiplicação de matriz por escalar

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, de elementos a_{ij} e um escalar $\alpha\in\Re$, então: $\alpha\cdot A$ é a matriz cujos elementos são do tipo $\alpha\cdot a_{ij}$. (isto é, multiplicamos todos os elementos de *A* por α).

Exemplos:

1) Se $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 9 & 6 & 2\\ 1 & -7 & 4\end{bmatrix}$ e $\alpha=2$, então $\alpha\cdot A=2\cdot A=\begin{bmatrix}6 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 4\\ 2 & -14 & 8\end{bmatrix}$

2) Se $B=\begin{bmatrix}3 & -4 & 1\\ 2 & 5 & -2\end{bmatrix}$ e $\alpha=-3$, então $\alpha\cdot B=-3\cdot B=\begin{bmatrix}-9 & 12 & -3\\ -6 & -15 & 6\end{bmatrix}$

Propriedades da Multiplicação de Matriz por escalar

i) $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A),\ \forall A\in M_{m\times n}(\Re), \forall\alpha,\beta\in\Re$

ii) $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A, \forall A\in M_{m\times n}(\Re), \forall\alpha,\beta\in\Re$

iii) $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B, \forall A,B\in M_{m\times n}(\Re), \forall\alpha\in\Re$

iv) $1\cdot A=A,\ \forall A\in M_{m\times n}(\Re)$

v) $0\cdot A=0,\ \forall A\in M_{m\times n}(\Re)$ obs.: $0\in\Re$ e $0\in M_{m\times n}(\Re)$

Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, com elementos do tipo a_{ij} $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$ e b_{jk} $(1\le j\le n, 1\le k\le p)$, respectivamente, então:

$A\cdot B$ é a matriz de elementos do tipo c_{ik} $(1\le i\le m, 1\le k\le p)$, definidos por:

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+a_{i3}\cdot b_{3k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk}$$

Observações:

1) O número de colunas da primeira matriz deve ser igual ao número de linhas da segunda matriz;

2) A matriz resultante do produto terá a mesma quantidade de linhas da primeira matriz e a mesma quantidade de colunas da segunda matriz.

Exemplos:

1) Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$, então $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$, onde:

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \cdot b_{jk}$, isto é:

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}$$
$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}$$
$$c_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23}$$
$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$
$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}$$
$$c_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23}$$

2) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, então $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$, onde:

$$c_{11} = 1 \cdot (-4) + 3 \cdot (5) + (-1) \cdot (-1) = 12$$
$$c_{12} = 1 \cdot (0) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (2) = 8$$
$$c_{13} = 1 \cdot (3) + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (0) = 0$$
$$c_{14} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (1) + (-1) \cdot (6) = -4$$
$$c_{21} = (-2) \cdot (-4) + (-1) \cdot (5) + (1) \cdot (-1) = 2$$
$$c_{22} = (-2) \cdot (0) + (-1) \cdot (-2) + (1) \cdot (2) = 4$$
$$c_{23} = (-2) \cdot (3) + (-1) \cdot (-1) + (1) \cdot (0) = -5$$
$$c_{24} = (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (1) + (1) \cdot (6) = 7$$

Logo $C = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes

(Desde que sejam possíveis as operações)

i) $A \cdot I = I \cdot A = A,$ sendo I a matriz identidade

ii) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ e $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

iii) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

iv) $0 \cdot A = 0$ e $A \cdot 0 = 0$

Observação: Em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$, podendo inclusive um dos membros da igualdade estar definido e o outro não.

Transposição de matrizes

Dada uma matriz $A_{m\times n}$, com elementos do tipo a_{ij} $(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$, denomina-se transposta de *A*, a matriz A^T, com elementos do tipo b_{ji} $(1\leq j\leq n, 1\leq i\leq m)$, cujas linhas são as colunas de *A*, isto é: $b_{ij}=a_{ji}$.

Isto é, é a matriz obtida com a troca ordenada das linhas pelas colunas das matriz original.

Exemplos:

1) Se $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 9 & 6 & 2\\ 1 & -7 & 4\end{bmatrix}$, então $A^T=\begin{bmatrix}3 & 9 & 1\\ 0 & 6 & -7\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}$

2) Se $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\\ -2 & 5\end{bmatrix}$, então $B^T=\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & 4 & 5\end{bmatrix}$

Propriedades da Transposição de Matrizes

i) $(A+B)^T=A^T+B^T$

ii) $(\alpha\cdot A)^T=\alpha\cdot A^T$, onde $\alpha\in\Re$

iii) $(A^T)^T=A$

iv) $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$

Definições:

Seja *A* uma matriz quadrada, então:

a) *A* é dita **simétrica**, se e somente se, $A^T=A$.

Exemplo:

1) $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -7\\ -1 & -7 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -7\\ -1 & -7 & 5\end{bmatrix}=A$

b) *A* é dita **antissimétrica**, se e somente se, $A^T=-A$.

Exemplo:

1) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 0 & 5\\ 3 & -5 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 0 & -5\\ -3 & 5 & 0\end{bmatrix}=-A$

1.1.6 Alguns exercícios resolvidos sobre matrizes

1) Para cada $\alpha \in \Re$, considere a matriz $T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

a) Mostre que $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$

<u>Resolução</u>:

$$T_\alpha \cdot T_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = T_{\alpha+\beta}$$

b) Ache $T_{-\alpha}$

<u>Resolução</u>:

$$T_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = T_\alpha^T$$

2) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

<u>Resolução</u>:

Sejam duas matrizes simétricas A e B. Logo $A^T = A$ e $B^T = B$.
$(A+B)^T = A^T + B^T = A + B$.

3) Mostre que a soma de duas matrizes antissimétricas é uma matriz antissimétrica.

<u>Resolução</u>:

Sejam duas matrizes antissimétricas A e B. Logo $A^T = -A$ e $B^T = -B$.
$(A+B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A+B)$.

4) Mostre que se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

<u>Resolução</u>:

$$\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A = A + A^T$$

5) Verifique que o produto de duas matrizes simétricas nem sempre é uma matriz simétrica.

<u>Resolução</u>:

Sejam duas matrizes simétricas A e B. Logo $A^T = A$ e $B^T = B$.
$(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T = B\cdot A$.

6) Se $A\cdot B = 0$, então podemos afirmar que $A = 0$ ou $B = 0$?

<u>Resolução</u>:

Não! Encontre alguns contraexemplos.

7) Suponha que $A \neq 0$ e $A \cdot B = A \cdot C$, então podemos afirmar que $B = C$?

Resolução:

Não!
$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow A \cdot B - A \cdot C = 0 \Rightarrow A \cdot (B - C) = 0$. Sabemos que $A \neq 0$, e que podemos ter $A \cdot (B - C) = 0$ sem que $B - C = 0$, Logo B não é necessariamente igual a C.

8) Considerando o exercício anterior, se existir uma matriz Y tal que $Y \cdot A = I$, podemos afirmar que $B = C$?

Resolução:

Sim!
$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow Y \cdot (A \cdot B) = Y \cdot (A \cdot C) \Rightarrow (Y \cdot A) \cdot B = (Y \cdot A) \cdot C \Rightarrow (I) \cdot B = (I) \cdot C \Rightarrow B = C$

9) Podemos dizer que a seguinte igualdade $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$ é verdadeira?

Resolução:

Não!
$(A + B) \cdot (A + B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$

10) Podemos dizer que a seguinte igualdade $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$ é verdadeira?

Resolução:

Não!
$(A - B) \cdot (A - B) = A \cdot A - A \cdot B - B \cdot A + B \cdot B = A^2 - A \cdot B - B \cdot A + B^2$

1.2 Determinantes e Matriz Inversa

1.2.1 Determinantes

Definições:

Se $A = [a_{11}] \Rightarrow \det A = a_{11}$

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} +$
$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

Propriedades dos determinantes

i) $\det A = \det A^T$

ii) Se multiplicarmos uma linha de uma matriz por $k \in \Re$, o determinante fica multiplicado por *k*.

iii) Uma vez permutadas duas linhas de uma matriz, o determinante da mesma troca de sinal.

iv) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) iguais é igual a zero.

v) O determinante não se altera se somarmos aos elementos de uma linha, os elementos correspondentes de outra linha multiplicados por uma constante.

vi) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

<u>Definição de submatriz</u>

Seja *A* uma matriz quadrada $n \times n$. Uma submatriz A_{ij} de *A* é uma matriz obtida de *A* eliminando a *i*-ésima linha e a *j*-ésima coluna de *A*.

<u>Exemplo</u>:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ então $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, etc.

<u>Definição de cofator</u>

Seja *A* uma matriz quadrada $n \times n$. O **<u>cofator</u>** ou **<u>complemento algébrico</u>** de um elemento a_{ij} de *A* é o número: $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

<u>Exemplo</u>:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ então:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \det A_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = -9,$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \det A_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -7, \text{ etc.}$$

<u>Desenvolvimento de Laplace</u> (Para calcular o determinante de qualquer matriz quadrada)

Seja *A* uma matriz com *n* linhas e *n* colunas.

Então, $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$, para qualquer linha *i*. (É a soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna), pelos seus respectivos cofatores).

<u>Observação</u>: O desenvolvimento pode também ser feito na variável *j*: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \Delta_{ij}$ para qualquer coluna *j*.

<u>Exemplos</u>:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ então calcule $\det A$.

<u>Resolução</u>:

Escolhendo, por exemplo, a segunda linha $(i = 2)$

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} \cdot \Delta_{2j} = a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{22} \cdot \Delta_{22} + a_{23} \cdot \Delta_{23} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{2+1} \det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 5 + 0 \cdot (-6) + 3 \cdot (-7) = -1$$

2) Seja A uma matriz triangular superior.

Verifique que o $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots\cdots\cdots . a_{nn}$.

1.2.2 Matriz Inversa

Seja A é uma matriz quadrada $n \times n$. Chamamos de matriz inversa de A à uma matriz B, também $n \times n$, que satisfaz a seguinte propriedade: $A \cdot B = B \cdot A = I$, em que $I = I_n$ é a matriz identidade $n \times n$. Se esta matriz B existir, A será chamada de matriz invertível.
Normalmente a matriz inversa de A é indicada por A^{-1}, logo: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

Exemplo:

1) Ache a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+4c & b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a+3c=1 \\ a+4c=0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4}{5} \text{ e } c = -\frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2b+3d=0 \\ b+4d=1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{3}{5} \text{ e } d = \frac{2}{5}$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

Observação: O mesmo resultado seria obtido fazendo: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema:

Se A é uma matriz invertível, então a sua inversa é única.

Demonstração:

Vamos supor que a matriz A possui duas inversas A_1^{-1} e A_2^{-1}. Logo temos que $A \cdot A_1^{-1} = I = A_1^{-1} \cdot A$ e $A \cdot A_2^{-1} = I = A_2^{-1} \cdot A$.
Assim $A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot I = A_1^{-1} \cdot \left(A \cdot A_2^{-1}\right) = \left(A_1^{-1} \cdot A\right) \cdot A_2^{-1} = I \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}$.
Portanto $A_1^{-1} = A_2^{-1}$ e a inversa é única.

Observações:

i) Se A e B são matrizes quadradas invertíveis, então $A \cdot B$ é também invertível e $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

ii) Uma matriz quadrada A admite inversa se e somente se $\det A \neq 0$.

iii) Se A é uma matriz quadrada e $\det A \neq 0$, então $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Demonstração de (iii):
Sabemos que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Se $A^{-1} \cdot A = I$, então temos que $\det(A^{-1} \cdot A) = \det A^{-1} \cdot \det A = \det I \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

iv) $(A^{-1})^{-1} = A$.

v) $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$.

Definição:

Chamamos de **operações elementares** nas linhas de uma matriz, às seguintes operações:

i) a troca da ordem de duas linhas da matriz;

ii) a multiplicação de uma linha da matriz por uma constante diferente de zero;

iii) a substituição uma linha da matriz por sua soma com outra linha multiplicada por uma constante diferente de zero.

Teorema:

Seja A uma matriz quadrada. Se uma sequência de operações elementares nas suas linhas reduz A a I, então a mesma sequência de operações elementares transforma I em A^{-1}.
Logo, a partir deste teorema, podemos usar o seguinte algoritmo para encontrar a matriz inversa de A:

$$[A \vdots I] \quad \overset{\text{Operações elementares:}}{\Rightarrow} \quad [I \vdots A^{-1}]$$

Exemplo:

1) Ache a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \Rightarrow \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ \Rightarrow \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \to \frac{1}{4}L_2}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ \Rightarrow \\ L_3 \to L_3 - 4L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_3 \to \frac{1}{2}L_3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - \frac{1}{2}L_3}{\Rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \text{ Assim, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Definição:

Seja *A* uma matriz quadrada $n \times n$. Então a matriz dos cofatores de *A*, é a matriz indicada pelo símbolo $\overline{A}$, cujos elementos são os cofatores (Δ_{ij}) dos elementos da matriz *A*.

Exemplo:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ então $\overline{A} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Pois,

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} 1 = 1$,

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} (-3) = 3$,

$\Delta_{21} = (-1)^{1+2} 1 = -1$,

$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} 2 = 2$

Definição:

Seja *A* uma matriz quadrada $n \times n$. Chama-se matriz adjunta de *A*, a matriz $adj\ A = (\overline{A})^T$, isto é, a transposta da matriz dos cofatores.

Exemplo:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ então $adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Teorema:

Seja *A* uma matriz quadrada $n \times n$, tal que $\det A \neq 0$. Então: $A \cdot adjA = (\det A) \cdot I_n$.

Deste teorema podemos concluir que:

$$A \cdot adjA = (\det A) \cdot I_n \Rightarrow A \cdot \frac{adjA}{\det A} = I_n \Rightarrow A^{-1} = \frac{adjA}{\det A}$$

<u>Definição</u>:

Uma matriz quadrada A se diz <u>ortogonal</u> se A é invertível e $A^{-1} = A^T$.

<u>Exemplos</u>:

1) Determinar, se possível, todos os valores x e y reais, a fim de que a matriz A seja ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & x \\ y & 1/2 \end{bmatrix}$$

<u>Resolução</u>:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & x \\ y & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & y \\ x & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4} + x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{y}{2} + \dfrac{x}{2} = 0 \\ y^2 + \dfrac{1}{4} = 1 \rightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

<u>Resposta</u>: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

2) Verifique (genericamente) que o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

<u>Resolução</u>:

Se A e B são matrizes ortogonais, então $A^{-1} = A^T$ e $B^{-1} = B^T$.
Sabe-se que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T$.

1.3 Exercícios propostos

1) Sendo A uma matriz quadrada $n \times n$ e, verifique que $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$.

2) Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, encontre, **<u>se existir</u>**, a matriz X para cada situação a seguir:

a) $A \cdot X = C^T$ **<u>Resposta</u>:** Não existe

b) $A + C^T = X \cdot B$ **<u>Resposta</u>:** $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{12}{7} & -\dfrac{3}{7} \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

c) $X = C^T \cdot A^T$ **Resposta:** $X = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 3 & 0 & -3 \\ 11 & 15 & 9 \end{bmatrix}$

3) Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação $\det(2 \cdot A \cdot A^T) = 4x$?

Resposta: $x = 32$

4) Seja a matriz quadrada A, 2×2, tal que $a_{ij} = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{2.i - j} & \text{se } i = j \\ \text{sen } \dfrac{\pi}{\text{i} + \text{j}} & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

Calcule o determinante de A. Se $\det A \neq 0$, ache A^{-1}.

Respostas: $\det A = -\dfrac{3}{4}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \dfrac{4}{3} \end{bmatrix}$

5) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, ache $(A^{-1})^T$ e $(A^T)^{-1}$.Conclua que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

6) Encontre as matrizes $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é, ache as matrizes

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, tais que $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$

Resposta: $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$

7) Encontre a matriz inversa da matriz A, utilizando operações elementares com linhas, sendo

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -9 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

8) Resolva a equação matricial: $\begin{bmatrix} x & y \\ 8 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ 8 & x+y \end{bmatrix}$

Resposta: $x = 3$, $y = 4$ e $z = 7$

9) Dada a matriz *A*, resolva a equação: $A^{-1} \cdot X \cdot A^T = A$ e ache *X* para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

<u>Respostas</u>: $X = A^2 \cdot \left(A^{-1}\right)^T$ e $X = \begin{bmatrix} -80 & 59 & -30 \\ -39 & 31 & -15 \\ -318 & 233 & -119 \end{bmatrix}$

10) Ache os valores dos determinantes das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ **<u>Resposta</u>:** -208

b) $\begin{bmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{bmatrix}$ **<u>Resposta</u>:** $a^2 + b^2$

Referências Bibliográficas

1. **BOLDRINI,** José Luiz *et al*. *Álgebra Linear*. 3.a Edição. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
2. **CALLIOLI,** Carlos A. *et al*. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6.a Edição. São Paulo: Atual, 1990.
3. **LIMA**, Elon L., *et al*. *A Matemática do Ensino Médio*. 3.a Edição. Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática – Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.
4. **POOLE**, David. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson Learning, 2006.
5. **STEINBRUCH,** Alfredo e **WINTERLE,** Paulo. *Álgebra Linear***.** 2.a Edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.
6. **STEINBRUCH,** Alfredo e **WINTERLE,** Paulo. *Geometria Analítica***.** 2.a Edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.