

Matemática discreta e Lógica Matemática

AULA 1 - Lógica Matemática

Prof. Dr. Hércules A. Oliveira

UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa
Departamento Acadêmico de Matemática

Ementa

1. Lógica

- ▶ Sentenças, representação simbólica e tautologias;
- ▶ Quantificadores, predicados e validade;
- ▶ Lógica proposicional;
- ▶ Lógica de predicados;

2. Demonstrações

- ▶ Raciocínio indutivo e dedutivo;
- ▶ Uso de contra-exemplos;
- ▶ Demonstração direta; Demonstração por contraposição;
Demonstração por exaustão; Demonstração por contradição;

3. Indução e Recursão

- ▶ O princípio da indução matemática; Demonstrações por indução;
Princípio da indução completa; Definições recursivas e suas
relações com demonstrações por indução;

Ementa

1. Lógica

- ▶ Sentenças, representação simbólica e tautologias;
- ▶ Quantificadores, predicados e validade;
- ▶ Lógica proposicional;
- ▶ Lógica de predicados;

2. Demonstrações

- ▶ Raciocínio indutivo e dedutivo;
- ▶ Uso de contra-exemplos;
- ▶ Demonstração direta; Demonstração por contraposição;
Demonstração por exaustão; Demonstração por contradição;

3. Indução e Recursão

- ▶ O princípio da indução matemática; Demonstrações por indução;
Princípio da indução completa; Definições recursivas e suas
relações com demonstrações por indução;

Ementa

1. Lógica

- ▶ Sentenças, representação simbólica e tautologias;
- ▶ Quantificadores, predicados e validade;
- ▶ Lógica proposicional;
- ▶ Lógica de predicados;

2. Demonstrações

- ▶ Raciocínio indutivo e dedutivo;
- ▶ Uso de contra-exemplos;
- ▶ Demonstração direta; Demonstração por contraposição;
Demonstração por exaustão; Demonstração por contradição;

3. Indução e Recursão

- ▶ O princípio da indução matemática; Demonstrações por indução;
Princípio da indução completa; Definições recursivas e suas
relações com demonstrações por indução;

Ementa

1. Funções e Relações

- Definição e exemplos de funções; Linguagens de programação e funções; Funções: injetivas; sobrejetivas; bijetivas; Composição de funções; Funções inversas; Relações binárias; Os fechos reflexivo, simétrico e transitivo de uma relação binária; Definição de relação de equivalência e classes de equivalência;

2. Conjuntos

3. Teoria dos Números

4. Combinatória

5. Análise de Algoritmos

6. Grafos e Árvores

Ementa

1. Funções e Relações

- Definição e exemplos de funções; Linguagens de programação e funções; Funções: injetivas; sobrejetivas; bijetivas; Composição de funções; Funções inversas; Relações binárias; Os fechos reflexivo, simétrico e transitivo de uma relação binária; Definição de relação de equivalência e classes de equivalência;

2. Conjuntos

3. Teoria dos Números

4. Combinatória

5. Análise de Algoritmos

6. Grafos e Árvores

Avaliações

1. Provas escritas:

- ▶ 1ª Prova (P1)- 08/10/2014, valor: 8,0;
- ▶ 2ª Prova (P2)- 03/12/2014, valor: 8,0;
- ▶ APS: 2 listas de exercícios (L1, L2), valor: 1,0 cada. Entregar no dia das provas;
- ▶ APS: Trabalho (T)- 05/11/2014, valor: 2,0;

2. Média Final (MF):

$$MF = \frac{P1 + P2 + L1 + L2 + T}{2} = 10,0$$

Avaliações

1. Provas escritas:

- ▶ 1ª Prova (P1)- 08/10/2014, valor: 8,0;
- ▶ 2ª Prova (P2)- 03/12/2014, valor: 8,0;
- ▶ APS: 2 listas de exercícios (L1, L2), valor: 1,0 cada. Entregar no dia das provas;
- ▶ APS: Trabalho (T)- 05/11/2014, valor: 2,0;

2. Média Final (MF):

$$MF = \frac{P1 + P2 + L1 + L2 + T}{2} = 10,0$$

Avaliações

Sub

1. Provas escritas:
2. Substitutiva da Média - 10/12/2014, valor: 10,0;

Avaliações

Sub

1. Provas escritas:
2. Substitutiva da Média - 10/12/2014, valor: 10,0;

Lógica - Conceitos iniciais

1. A Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade.
2. Aristóteles - filósofo grego - 342 a.C, sistematizou os conhecimentos existentes em Lógica, elevando-os à categoria de ciência.
3. Em sua obra chamada Organum (ferramenta para o correto pensar), estabeleceu princípios tão gerais e tão sólidos que até hoje são considerados válidos.

Lógica - Conceitos iniciais

1. A Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade.
2. Aristóteles - filósofo grego - 342 a.C, sistematizou os conhecimentos existentes em Lógica, elevando-os à categoria de ciência.
3. Em sua obra chamada Organum (ferramenta para o correto pensar), estabeleceu princípios tão gerais e tão sólidos que até hoje são considerados válidos.

Lógica - Conceitos iniciais

1. Para descrever o mundo, usamos sentenças declarativas tais como:
 - ▶ Toda mãe ama seus filhos
 - ▶ Maria é mãe e Paulo é Filho de Maria
2. Aplicando algumas regras gerais de raciocínio, podemos concluir a partir dessas afirmações:
3. Maria ama Paulo.

Definição

Proposição

É uma sentença declarativa (isto é, uma sentença que declara um fato), que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas.

Exemplo

- ▶ Dez é menor que sete. (é)
- ▶ Como você está? (não é)
- ▶ $3 + 4 > 5$. (é)
- ▶ Existe vida em outros planetas. (é)
- ▶ Parabéns! (não é)

Definição

Proposição Composta

Duas ou mais proposições podem ser agrupadas usando os **conectivos lógicos**.

Exemplo

1. Linux é um sistema operacional **e** Java é uma linguagem de programação.
2. Vou comprar uma camisa azul **ou** branca.
3. **Se** chover hoje, **então** não terá o show.

Lógica Formal

Definição 1

Seja p uma proposição. A *negação de p* , indicada por $\neg p$ (e também por $\bar{p}$), é a sentença
“Não é o caso de p ”.

- A proposição $\neg p$ é lida “*não p* ” (não é p).
- O valor-verdade da negação de p , $\neg p$, é o oposto do valor-verdade de p .

Exemplo

1. p : Hoje é quarta.
2. A negação $\neg p$: Não é o caso de hoje ser quarta.
Hoje não é quarta.

Tabela-Verdade

Síntese das proposições

“Quando”

p	$\neg p$
V	F
F	V

Operadores lógicos: Conectivos

Definição 2

1. Sejam p e q Proposições. A *conjunção* de p e q , indicada por $p \wedge q$, é a proposição “ p e q ”.
2. A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambas são verdadeiras, e falsa caso contrário.

O conectivo lógico **e** é representado pelo símbolo $\wedge$ e as proposições são representadas por letras.

Operadores lógicos: Conectivos

Exemplo

Encontre a conjunção das proposições p e q , em que p é: Hoje é sexta-feira, e q é: Hoje está chovendo.

Resposta:

A conjunção $p \wedge q$ dessas proposições é a proposição: Hoje é sexta-feira e está chovendo.

Essa proposição é verdadeira em uma sexta chuvosa e falsa em qualquer outro caso.

Linux é um sistema operacional e Java é uma linguagem de programação.

Conjunção

Podemos então apresentar a tabela com os valores lógicos de $p \wedge q$ para todos os valores lógicos possíveis dos elementos p e q . Cada linha da tabela representa um possível valor lógico associado a cada uma das letras de proposição e apresenta o valor lógico resultante da expressão composta.

Tabela-verdade

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

Definição 3

1. Sejam p e q proposições. A *disjunção* de p e q , indicada por $p \vee q$, é a proposição “ p ou q ”.
2. A disjunção $p \vee q$ é falsa se p e q são ambas falsas, e verdadeiras em qualquer outro caso.

O conectivo lógico **ou** é representado pelo símbolo $\vee$.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disjunção Exclusiva

Definição 4

1. Sejam p e q proposições. A *disjunção exclusiva* (ou *ou exclusiva*) de p e q , indicada por $p \oplus q$.
2. A disjunção $p \oplus q$ é verdadeira quando exatamente uma das duas for verdadeira e falsa nos outros casos.

O conectivo lógico **ou (apenas)** é representado pelo símbolo $\oplus$.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposição Condicional

Definição 5

1. Sejam p e q proposições. A *proposição Condicional* $p \rightarrow q$ é a proposição “se p , então q ”.
2. A condição $p \rightarrow q$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa, e verdadeira em qualquer outro caso.

Na condição $p \rightarrow q$, p é chamada de *hipótese* (ou antecedentes, ou premissa) e q é chamada de *conclusão* (ou consequência, ou consequente).

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição Condicional

Exemplo 1

1. Se eu for eleito, então os impostos vão diminuir.
2. p : Se eu for eleito $\rightarrow q$: então os impostos vão diminuir.

Exemplo

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição Condicional

Exemplo 2

1. Seja p a proposição “Maria aprende matemática discreta” e q a proposição “Maria vai conseguir um bom emprego”.
2. Expresse $p \rightarrow q$ em português.
3. Se Maria aprender matemática discreta, então ela vai conseguir um bom emprego.
4. Maria vai conseguir um bom emprego quando aprender matemática discreta.

Proposição Condicional

Exemplo 3

1. Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 5$.
2. Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 6$.

Exemplo

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Proposição Condicional

Exemplo 3

1. Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 5$.
2. Se hoje é sexta-feira, então $2 + 3 = 6$.

Exemplo - programação

```
x=0.d0  
do i=1,10  
  if (i.lt.7) then  
    write(*,*) i,x  
    x=x+0.1d0  
  endif  
enddo
```

Proposição Bicondicional

Definição 6

1. Sejam p e q proposições. A *proposição Condicional* $p \leftrightarrow q$ é a proposição “se e somente se”.
 2. A condição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira sempre que p e q têm o mesmo valor-verdade, e falsa caso contrário.
-
1. Bicondicionais são também chamadas de *bi-implicações*.
 2. Note que: $p \leftrightarrow q$ é exatamente o mesmo que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposição Bicondicional

Exemplo 1

1. p : Você pode tomar o avião.
2. q : Você comprou uma passagem.
3. $p \leftrightarrow q$: Você pode tomar o avião se e somente se comprou uma passagem.

Proposição Compostas

Tabela-Verdade

1. Construa a tabela-verdade para a proposição composta:
2. $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Proposição Compostas

Exemplos

1. $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	F

Relembrando

Tabela-Verdade

p	Proposição	variável
q	Proposição	variável
$\neg q$	não é o caso de q	negativa de q
$\wedge$	e	Conjunção
$\vee$	ou	Disjunção
$\oplus$	ou exclusiva	Disjunção exclusiva
$\rightarrow$	se, então	Condicional
$\leftrightarrow$	se e somente se	Bicondicional

Prioridades

Operadores Lógicos

Operador	Prioridade
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Traduzindo sentenças

Operadores Lógicos

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Separando

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Traduzindo sentenças

Separando

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus **somente se** você é um expert em Ciência da Computação **ou** não é novato.

Separando (uma condição apenas!!! $\rightarrow$)

1. a : Você pode acessar a internet a partir deste câmpus
2. c : você é um expert em Ciência da Computação
3. $\neg f$: você não é novato (*negação*). f : você é novato.
4. Conectivos:
 - ▶ **somente se** (se, então)-($\rightarrow$)
 - ▶ **ou** ($\vee$)

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$$a \rightarrow (c \vee \neg f)$$

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$$a \rightarrow (c \vee \neg f)$$

Traduzindo sentenças

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina somente se estudar bastante.

Como fica

$$p \leftrightarrow q$$

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina e em cálculo se prestar atenção na aula ou estudar muito em casa.

Como fica

$$p \wedge q \vee r$$

Traduzindo sentenças

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina somente se estudar bastante.

Como fica

$$p \leftrightarrow q$$

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina e em cálculo se prestar atenção na aula ou estudar muito em casa.

Como fica

$$p \wedge q \vee r$$

Traduzindo sentenças

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina somente se estudar bastante.

Como fica

$$p \leftrightarrow q$$

Como podemos traduzir para expressões lógicas?

Você pode ser aprovado nesta disciplina e em cálculo se prestar atenção na aula ou estudar muito em casa.

Como fica

$$p \wedge q \vee r$$

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$$a \rightarrow (c \vee \neg f)$$

Traduzindo sentenças

Como fica

Você pode acessar a internet a partir deste câmpus somente se voê é um expert em Ciência da Computação ou não é novato.

Como fica

$$a \rightarrow (c \vee \neg f)$$

Lógica de Bit

Bit (binary digit - dígito binário): 0 e 1.

Tabela-Verdade

<i>Valor – Verdade</i>	Bit
V	1
F	0

Lógica de Bit

Bit (binary digit - dígito binário): 0 e 1.

Tabela-Verdade

<i>Valor – Verdade</i>	Bit
V	1
F	0

FIM