

# Cálculo numérico: resolução aproximada de equações diferenciais ordinárias

Prof. Angelo Aliano Filho

UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Primeiro semestre de 2021

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# Teoria preliminar

Referências para estas notas em (1), (2) e (3)

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# Teoria preliminar

## Definição – Problema de valor inicial (PVI)

Seja  $y(t)$  uma função desconhecida na variável independente  $t$  que satisfaz a equação diferencial e a condição inicial a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

A solução  $y(t)$  que satisfaz as condições acima chama-se de *solução de problema de valor inicial (PVI)*

A seguir, apresentamos teoremas que garantem unicidade de um PVI.

# Teoria preliminar

## Definição – condição de Lipschitz

Uma função  $f(t, y)$  satisfaz a *condição de Lipschitz* na variável  $y$  em um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$  se existe uma constante  $L$  tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

para todo  $(t, y_1)$  e  $(t, y_2)$  em  $D$ . O número  $L$  é chamado *constante de Lipschitz*.

# Teoria preliminar

## Exemplo

A função  $f(t, y) = t|y|$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $D = \{(t, y) | 1 \leq y \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$  pois

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$$

# Teoria preliminar

## Teorema

Suponha  $f(t, y)$  definida em um conjunto convexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Se uma constante  $L > 0$  com

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L, \quad (t, y) \in D,$$

então  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $D$  com constante de Lipschitz  $L$ .

Esta é uma maneira útil de determinarmos a constante de Lipschitz.

# Teoria preliminar

## Teorema – unicidade de um PVI

Suponha  $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$  e  $f(t, y)$  contínua em  $D$ . Se  $f$  satisfaz a condição de Lipschitz em  $D$  na variável  $y$ , então o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), & a \leq t \leq b \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

tem *única* solução  $y(t)$  com  $a \leq t \leq b$ .

# Teoria preliminar

## Exemplo

Seja o PVI  $y' = 1 + t \sin(ty)$  com  $0 \leq t \leq 2$  e  $y(0) = 0$ . Mantendo  $t$  constante e usando o TVM obtemos que:

# Teoria preliminar

## Exemplo

Seja o PVI  $y' = 1 + t \sin(ty)$  com  $0 \leq t \leq 2$  e  $y(0) = 0$ . Mantendo  $t$  constante e usando o TVM obtemos que:

$$\frac{f(t, y_1) - f(t, y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) = t^2 \cos(ty),$$

para algum  $\xi \in (y_1, y_2)$ . Assim:

# Teoria preliminar

## Exemplo

Seja o PVI  $y' = 1 + t \sin(ty)$  com  $0 \leq t \leq 2$  e  $y(0) = 0$ . Mantendo  $t$  constante e usando o TVM obtemos que:

$$\frac{f(t, y_1) - f(t, y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) = t^2 \cos(ty),$$

para algum  $\xi \in (y_1, y_2)$ . Assim:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1 - y_2| |t^2 \cos(ty)| \leq 4|y_1 - y_2|,$$

cujas constante de Lipschitz é  $L = 4$ . Como  $f(t, y)$  é contínua o teorema anterior garante unicidade na solução do PVI retratado.

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# O Método de Euler

- É o método mais elementar para resolver um PVI. Às vezes é chamado de *método das tangentes*.
- Gera aproximações para a solução exata  $y(t)$  de um PVI a cada iteração  $n = 0, 1, 2, \dots$
- A aproximação não é contínua, e sim discreta. A aproximação contínua pode ser obtida por interpolação.

# O Método de Euler

Desenvolvimento do método:

# O Método de Euler

Desenvolvimento do método:

- Defina  $h = (b - a)/n$ , chamado *tamanho de passo* e  $n$  atribuído pelo usuário.

# O Método de Euler

Desenvolvimento do método:

- Defina  $h = (b - a)/n$ , chamado *tamanho de passo* e  $n$  atribuído pelo usuário.
- Calcule os pontos do domínio  $t_i = a + i \cdot h$  com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

# O Método de Euler

Desenvolvimento do método:

- Defina  $h = (b - a)/n$ , chamado *tamanho de passo* e  $n$  atribuído pelo usuário.
- Calcule os pontos do domínio  $t_i = a + i \cdot h$  com  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .
- Usamos o Teorema de Taylor. Sendo  $y(t)$  a única solução do PVI podemos escrever que:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i),$$

onde  $\xi_i \in (t_i, t_i + h)$ .

# O Método de Euler

- Como  $y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$  reescrevemos a última igualdade por:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

- O método de Euler constrói uma sequência de  $w_i \approx y(t_i)$  para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  deletando o termo quadrático anterior, isto é, aproximando o real valor de  $y(t_{i+1})$  pela sequência:

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

Coef. ang.

$$k = f(t_i, w_i)$$

Note a estrutura deste método:  $w_{i+1} = w_i + \underbrace{k}_k h$

# O Método de Euler

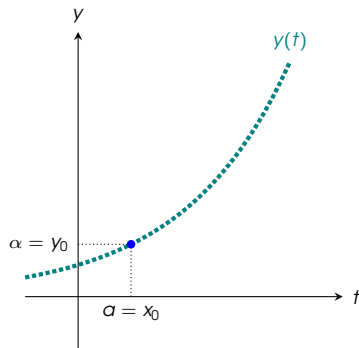


Figura: Solução inicial do PVI

# O Método de Euler

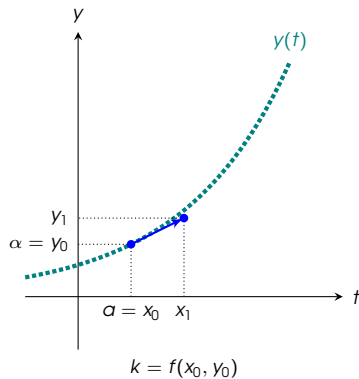


Figura: Primeira estimativa

# O Método de Euler

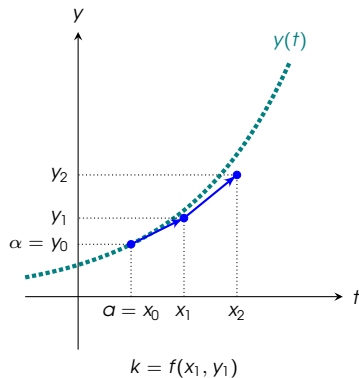


Figura: Segunda estimativa

# O Método de Euler

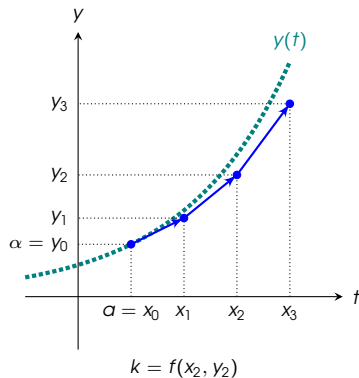


Figura: Terceira estimativa

# O Método de Euler

O algoritmo para este método é dado a seguir:

---

**Algoritmo 1:** Método de Euler para PVIs

---

**Input:**  $f, a, b, n, \alpha$ ;

$h = (b - a)/n$ ;

$t = a$ ;

$w = \alpha$ ;

**for**  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  **do**

$t = a + i \cdot h$ ;

$w = w + h \cdot f(t, w)$ ;

**end**

**Output:**  $(t, w)$ .

---

# O Método de Euler

## Exemplo

Seja o PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

Usamos o método de Euler para aproximar a solução  $y(t)$  no intervalo  $[0, 2]$ . Por facilidade, adotamos  $n = 10 \implies h = (2 - 0)/10 = 0.2$ .

# O Método de Euler

Cálculos do método de Euler no PVI  $y' = y - t^2 + 1$ ,  $y(0) = 0.5$  com  $n = 10$ .

# O Método de Euler

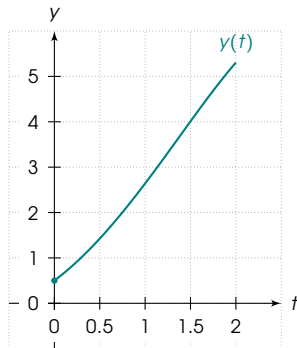


Figura: Solução exata do PVI

# O Método de Euler

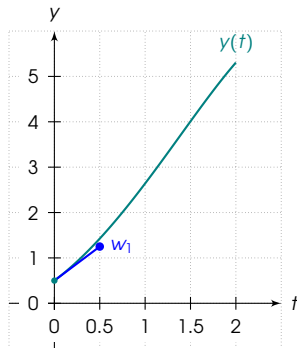


Figura: Solução exata do PVI com  $w_1$

# O Método de Euler

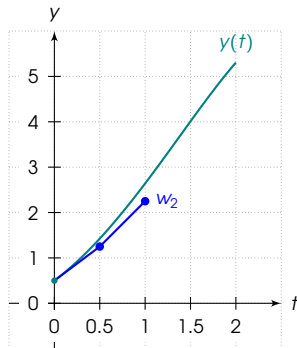


Figura: Solução exata do PVI com  $w_2$

# O Método de Euler

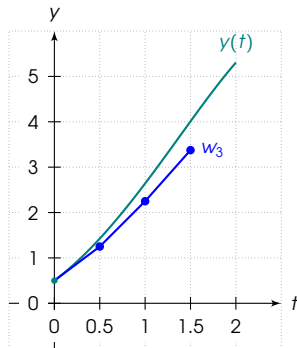


Figura: Solução exata do PVI com  $w_3$

# O Método de Euler

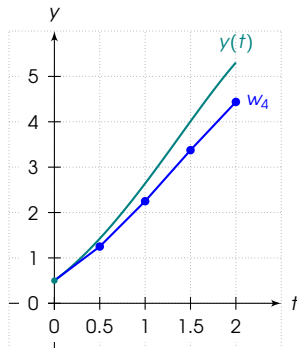


Figura: Solução exata do PVI com  $w_4$

# O Método de Euler

Comportamento do método de Euler em termos de  $n$  no PVI  $y' = y - t^2 + 1$ ,  $y(0) = 0.5$ .

# O Método de Euler

**Tabela:** Método de Euler e erros absolutos (em módulo) em relação à solução exata de em termos de  $n$

| $t_i$ | $n = 20$               | $n = 40$               | $n = 80$               |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0.0   | 0.000                  | 0.000                  | 0.000                  |
| 0.2   | $1.530 \times 10^{-2}$ | $7.827 \times 10^{-3}$ | $3.960 \times 10^{-3}$ |
| 0.4   | $3.255 \times 10^{-2}$ | $1.669 \times 10^{-2}$ | $8.453 \times 10^{-3}$ |
| 0.6   | $5.188 \times 10^{-2}$ | $2.666 \times 10^{-2}$ | $1.352 \times 10^{-2}$ |
| 0.8   | $7.338 \times 10^{-2}$ | $3.781 \times 10^{-2}$ | $1.920 \times 10^{-2}$ |
| 1.0   | $9.710 \times 10^{-2}$ | $5.017 \times 10^{-2}$ | $2.552 \times 10^{-2}$ |
| 1.2   | $1.230 \times 10^{-1}$ | $6.375 \times 10^{-2}$ | $3.247 \times 10^{-2}$ |
| 1.4   | $1.509 \times 10^{-1}$ | $7.847 \times 10^{-2}$ | $4.005 \times 10^{-2}$ |
| 1.6   | $1.805 \times 10^{-1}$ | $9.420 \times 10^{-2}$ | $4.817 \times 10^{-2}$ |
| 1.8   | $2.111 \times 10^{-1}$ | $1.107 \times 10^{-1}$ | $5.672 \times 10^{-2}$ |
| 2.0   | $2.420 \times 10^{-1}$ | $1.275 \times 10^{-1}$ | $6.550 \times 10^{-2}$ |

# O Método de Euler

Algumas observações podemos fazer:

- Para um valor fixo de  $t$ , os valores de  $w_i$  e  $y_i$  tornam-se mais próximos a medida que  $n$  aumenta
- Por outro lado, mais cálculos serão necessários a medida que  $n$  aumenta.
- Para um  $n$  fixo, as aproximações tendem a serem melhores quanto mais próximos estamos do ponto  $(\alpha, \alpha) = (0, 0.5)$

Questões a serem respondidas:

- Se  $n \rightarrow \infty$ ,  $w_1, w_2, \dots, w_n$  converge para a solução exata?
- Se sim, quando a velocidade de convergência?

# O Método de Euler

## Teorema – erro absoluto no método de Euler

Seja  $f$  contínua, satisfaz a condição de Lipschitz com constante  $L$  em  $D = \{(t, y) | a \leq y \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$  e que  $\max_{x \in [a, b]} |y''(t)| = M$ , em que  $y$  é a única solução do PVI. Então as aproximações  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$  satisfazem a seguinte desigualdade:

$$e_i = |y(t_i) - w_i| \leq h \cdot \frac{M}{2L} \left( e^{L(t_i - a)} - 1 \right).$$

# O Método de Euler

## Teorema – erro absoluto no método de Euler

Seja  $f$  contínua, satisfaz a condição de Lipschitz com constante  $L$  em  $D = \{(t, y) | a \leq y \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$  e que  $\max_{x \in [a, b]} |y''(t)| = M$ , em que  $y$  é a única solução do PVI. Então as aproximações  $w_0, w_1, w_2, \dots, w_n$  satisfazem a seguinte desigualdade:

$$e_i = |y(t_i) - w_i| \leq h \cdot \frac{M}{2L} \left( e^{L(t_i - a)} - 1 \right).$$

- Se  $h \rightarrow 0$  então  $e_i \rightarrow 0$
- A medida que  $t_i$  se afasta de  $a$  maior é o erro.
- Quanto menores as constantes  $L$  e  $M$ , mais rápida é a convergência.

# O Método de Euler

- A parte ruim do teorema de estimativa de erro é que precisamos conhecer a segunda derivada da solução.
- Todavia podemos obter o seguinte, pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned}y''(t) &= \frac{dy'}{dt}(t) \\&= \frac{d}{dt}f(t, y(t)) \\&= \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\&= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))\end{aligned}$$

uma maneira de termos a segunda derivada.

# O Método de Euler

## Exemplo

Majore o erro cometido com o método de Euler ao resolvermos o PVI anterior no mesmo intervalo.

# O Método de Euler

Resolução:

- A constante de Lipschitz é dada por:

# O Método de Euler

Resolução:

- A constante de Lipschitz é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) = \frac{\partial}{\partial y}(y - t^2 + 1) = 1, \quad \forall t \in [0, 2],$$

segue que  $L = 1$ .

# O Método de Euler

Resolução:

- A constante de Lipschitz é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) = \frac{\partial}{\partial y}(y - t^2 + 1) = 1, \quad \forall t \in [0, 2],$$

segue que  $L = 1$ .

- Para estimarmos o máximo da segunda derivada, usamos o fato de que

$$\begin{aligned} |y''(t)| &= |f_t + f_y \cdot f| \\ &= |-2t + 1 \cdot (y - t^2 + 1)| \\ &\leq 6 \end{aligned}$$

pelo gráfico anterior.

# O Método de Euler

- Logo,

$$e_i \leq h \cdot 3 \left( e^{t_i} - 1 \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

# O Método de Euler

- Logo,

$$e_i \leq h \cdot 3 \left( e^{t_i} - 1 \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

- Isso significa que, para um  $t_i$  fixo, o erro é proporcional a  $h$ .
- Por exemplo, para  $t = 2$  e  $h = 0.5$ , a estimativa do erro é no máximo 4.79.
- Por isso o método de Euler é chamado de *primeira ordem*.
- Isso significa que, se quisermos reduzir à metade o erro, deveremos reduzir à metade  $h$

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# Método de Euler melhorado

- Uma tentativa de melhorar o método de Euler consiste em considerar como cálculo do coeficiente angular o seguinte:

# Método de Euler melhorado

- Uma tentativa de melhorar o método de Euler consiste em considerar como cálculo do coeficiente angular o seguinte:

$$k = \frac{1}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1}))$$

que é a média aritmética dos coeficientes angulares entre dois pontos seguidos (lembre-se que no Euler tradicional  $k = f(t_i, y_i)$ )

# Método de Euler melhorado

- Uma tentativa de melhorar o método de Euler consiste em considerar como cálculo do coeficiente angular o seguinte:

$$k = \frac{1}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1}))$$

que é a média aritmética dos coeficientes angulares entre dois pontos seguidos (lembre-se que no Euler tradicional  $k = f(t_i, y_i)$ )

- Assim, as iteradas do método melhorado ficam assim:

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})), \end{cases}$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

# Método de Euler melhorado

- Uma tentativa de melhorar o método de Euler consiste em considerar como cálculo do coeficiente angular o seguinte:

$$k = \frac{1}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1}))$$

que é a média aritmética dos coeficientes angulares entre dois pontos seguidos (lembre-se que no Euler tradicional  $k = f(t_i, y_i)$ )

- Assim, as iteradas do método melhorado ficam assim:

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_{i+1})), \end{cases}$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

- Todavia há um problema: não conseguimos isolar  $w_{i+1}$  acima!

# Método de Euler melhorado

- Podemos substituir

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

na igualdade anterior para obtermos as iteradas

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))), \end{cases}$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Esta modificação é o *método de Euler Modificado* ou *Fórmula de Heun*.

# Método de Euler melhorado

- Podemos substituir

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i)$$

na igualdade anterior para obtermos as iteradas

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))), \end{cases}$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Esta modificação é o *método de Euler Modificado* ou *Fórmula de Heun*.

- É possível mostrar que ele é *um método de ordem 2*, isto é, o erro de truncamento global é proporcional a  $h^2$

# Método de Euler melhorado

O algoritmo para este método de Euler melhorado é dado a seguir:

---

**Algoritmo 2:** Método de Euler melhorado para PVI's

---

**Input:**  $f, a, b, n, \alpha$ ;

$h = (b - a)/n$ ;

$t = a$ ;

$w = \alpha$ ;

**for**  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  **do**

$t = a + i \cdot h$ ;

$w = w + \frac{h}{2}(f(t, w) + f(t + h, w + hf(t, w)))$ ;

**end**

**Output:**  $(t, w)$ .

---

# Método de Euler melhorado

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .

# Método de Euler melhorado

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .
- Em seguida, dá-se um passo de Euler de tamanho  $h$  usando  $k_1$  a partir de  $t_i$ . Então obtemos o ponto  $(t_i + h, w_i + hk_1)$ .

# Método de Euler melhorado

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .
- Em seguida, dá-se um passo de Euler de tamanho  $h$  usando  $k_1$  a partir de  $t_i$ . Então obtemos o ponto  $(t_i + h, w_i + hk_1)$ .
- Calcula-se um novo coeficiente angular neste novo ponto, isto é,  $k_2 = f(t_i + h, w_i + hk_1)$ .

# Método de Euler melhorado

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .
- Em seguida, dá-se um passo de Euler de tamanho  $h$  usando  $k_1$  a partir de  $t_i$ . Então obtemos o ponto  $(t_i + h, w_i + hk_1)$ .
- Calcula-se um novo coeficiente angular neste novo ponto, isto é,  $k_2 = f(t_i + h, w_i + hk_1)$ .
- Finalmente, damos um passo de Euler de tamanho  $h$  a partir de  $t_i$  usando-se o coeficiente angular médio, i.e.,  $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  para obtermos a nova aproximação  $w_{i+1} = w_i + hk$

# Método de Euler melhorado

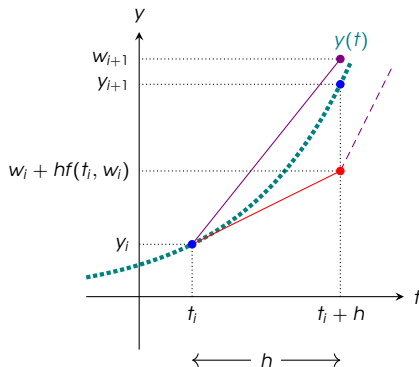


Figura: Interpretação geométrica do método Euler melhorado

# Método de Euler melhorado

- **Observação:** se  $f(t, y)$  não depender de  $y$ , a equação diferencial se reduz à integral de  $f(t)$ . Então temos que:

# Método de Euler melhorado

- **Observação:** se  $f(t, y)$  não depender de  $y$ , a equação diferencial se reduz à integral de  $f(t)$ . Então temos que:

$$w_{i+1} - w_i = \frac{h}{2} (f(t_i) + f(t_i + h)),$$

que é precisamente a regra do Trapézio para Integrais.

# Método de Euler melhorado

- **Observação:** se  $f(t, y)$  não depender de  $y$ , a equação diferencial se reduz à integral de  $f(t)$ . Então temos que:

$$w_{i+1} - w_i = \frac{h}{2} (f(t_i) + f(t_i + h)),$$

que é precisamente a regra do Trapézio para Integrais.

- Veja que  $y' = f(t, y(t))$  se integrada de  $t_i$  a  $t_{i+1}$  resulta em:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y'(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \implies y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

E como  $y(t_i) \approx w_i$  obtemos que:

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) \approx w_{i+1} - w_i = \frac{h}{2} (f(t_i) + f(t_i + h))$$

# Método de Euler melhorado

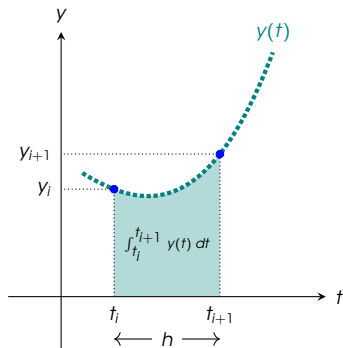


Figura: Área exata é o valor de  $y_{i+1} - y_i$

# Método de Euler melhorado

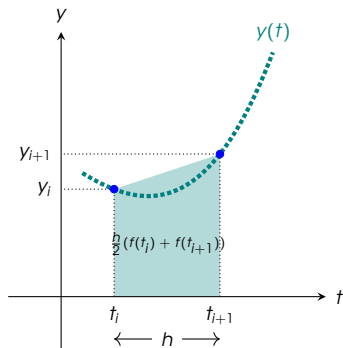


Figura: Aproximação para a área  $y_{i+1} - y_i$  por um trapézio

# Método de Euler melhorado

## Exemplo

Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - 3t + 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

Usamos o método de Euler melhorado para aproximar a solução  $y(t)$  no intervalo  $[0, 2]$ .

# Método de Euler melhorado

**Tabela:** Método de Euler melhorado e erros absolutos (em módulo) em relação à solução exata de em termos de  $n$

| $t_i$ | $n = 20$               | $n = 40$               | $n = 80$               |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 0.0   | 0.000                  | 0.000                  | 0.000                  |
| 0.2   | $5.666 \times 10^{-4}$ | $1.471 \times 10^{-4}$ | $3.746 \times 10^{-5}$ |
| 0.4   | $1.384 \times 10^{-3}$ | $3.592 \times 10^{-4}$ | $9.151 \times 10^{-5}$ |
| 0.6   | $2.535 \times 10^{-3}$ | $6.581 \times 10^{-4}$ | $1.677 \times 10^{-4}$ |
| 0.8   | $4.128 \times 10^{-3}$ | $1.072 \times 10^{-3}$ | $2.730 \times 10^{-4}$ |
| 1.0   | $6.301 \times 10^{-3}$ | $1.636 \times 10^{-3}$ | $4.168 \times 10^{-4}$ |
| 1.2   | $9.235 \times 10^{-3}$ | $2.398 \times 10^{-3}$ | $6.109 \times 10^{-4}$ |
| 1.4   | $1.316 \times 10^{-2}$ | $3.417 \times 10^{-3}$ | $8.706 \times 10^{-4}$ |
| 1.6   | $1.836 \times 10^{-2}$ | $4.769 \times 10^{-3}$ | $1.215 \times 10^{-3}$ |
| 1.8   | $2.523 \times 10^{-2}$ | $6.553 \times 10^{-3}$ | $1.670 \times 10^{-3}$ |
| 2.0   | $3.423 \times 10^{-2}$ | $8.893 \times 10^{-3}$ | $2.266 \times 10^{-3}$ |

# Método de Euler melhorado

Cálculos do método de Euler melhorado no PVI  $y' = y - 3t + 1$ ,  $y(0) = 0.5$  com  $n = 10$ .

# Método de Euler melhorado

Ilustração da convergência do Euler simples em termos de  $n$  no PVI  
 $y' = y - 3t + 1, y(0) = 0.5$

# Método de Euler melhorado

Ilustração da convergência do Euler melhorado em termos de  $n$  no PVI  
 $y' = y - 3t + 1, y(0) = 0.5$

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# Método de Taylor de ordem superior

## Ideia geral

Considere o PVI:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

Nossa ideia é gerar um método que, em menos iterações gera uma aproximação melhor, mesmo se estejamos longe de  $t = a$ .

# Método de Taylor de ordem superior

Vamos expandir  $y(t)$  no seu polinômio de Taylor de grau  $n + 1$  em torno de  $t_i$ :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \cdots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i),$$

para  $\xi_i \in (t_i, t_i + h)$

# Método de Taylor de ordem superior

Vamos expandir  $y(t)$  no seu polinômio de Taylor de grau  $n + 1$  em torno de  $t_i$ :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \cdots + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_i),$$

para  $\xi_i \in (t_i, t_i + h)$  Agora, por outro lado, temos que:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y''(t) = f'(t, y(t)), \quad \cdots, \quad y^{(k)}(t) = f^{k-1}(t, y(t)).$$

Vamos substituir estas igualdades na expansão de Taylor.

# Método de Taylor de ordem superior

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y(t_i) + hf(t, y(t_i)) + h^2 f'(t, y(t_i)) + \cdots \\
 &+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \underbrace{\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_i, y(\xi_i))}_{\text{Deletamos este resto}}
 \end{aligned}$$

Então este método aproxima  $y_{i+1}$  usando uma aproximação de Taylor em torno  $y_i$  de grau  $n - 1$ . No método de Euler, o polinômio de Taylor tem grau  $n = 1$ .

# Método de Taylor de ordem superior

- Assim, no método de Taylor de ordem superior, consideramos  $w_i \approx y(t_i)$  e as iteradas:

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h \cdot T^n(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

onde

$$T^n(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}f'(t_i, w_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n-1)}(t_i, w_i).$$

# Método de Taylor de ordem superior

## Exemplo

Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

usando o método de Taylor de segunda ordem e  $n = 4$ .

# Método de Taylor de ordem superior

- Nesse caso, as iteradas são dadas por:

$$w_{i+1} = w_i + 0.25 \cdot \left( f(t_i, w_i) + \frac{0.25}{2} f'(t_i, w_i) \right),$$

$$\text{e } t_i = 0 + h \cdot i = 2i/n, i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

# Método de Taylor de ordem superior

- Nesse caso, as iteradas são dadas por:

$$w_{i+1} = w_i + 0.25 \cdot \left( f(t_i, w_i) + \frac{0.25}{2} f'(t_i, w_i) \right),$$

e  $t_i = 0 + h \cdot i = 2i/n$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

- Agora,

# Método de Taylor de ordem superior

- Nesse caso, as iteradas são dadas por:

$$w_{i+1} = w_i + 0.25 \cdot \left( f(t_i, w_i) + \frac{0.25}{2} f'(t_i, w_i) \right),$$

e  $t_i = 0 + h \cdot i = 2i/n$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

- Agora,

$$f(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 + 1 \quad \text{e} \quad f'(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 - 2t_i + 1$$

- Assim, para  $i = 0$ ,  $t_0 = 0$  e  $w_0 = 0.5$  e daí:

# Método de Taylor de ordem superior

- Nesse caso, as iteradas são dadas por:

$$w_{i+1} = w_i + 0.25 \cdot \left( f(t_i, w_i) + \frac{0.25}{2} f'(t_i, w_i) \right),$$

e  $t_i = 0 + h \cdot i = 2i/n$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

- Agora,

$$f(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 + 1 \quad \text{e} \quad f'(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 - 2t_i + 1$$

- Assim, para  $i = 0$ ,  $t_0 = 0$  e  $w_0 = 0.5$  e daí:

$$w_1 = w_0 + 0.5 \left[ (w_0 - t_0^2 + 1) + 0.5(w_0 - t_0^2 - 2t_0 + 1)/2 \right]$$

resultando em 1.4375. As outras calculações estão a seguir.

# Método de Taylor de ordem superior

**Tabela:** Demais valores para as aproximações de Taylor de 2ª ordem para o PVI

| $i$ | $t_i$ | $w_i$   |
|-----|-------|---------|
| 0   | 0.0   | 0.5     |
| 1   | 0.5   | 1.4375  |
| 2   | 1.0   | 2.67969 |
| 3   | 1.5   | 4.10449 |
| 4   | 2.0   | 5.51355 |

# Método de Taylor de ordem superior

Detalhamento dos cálculos a seguir com  $n = 10$ :

# Método de Taylor de ordem superior

Comportamento do método de Taylor de 2ª ordem em termos de  $n$  no PVI  $y' = y - t^2 + 1$ ,  $y(0) = 0.5$ .

# Método de Taylor de ordem superior

**Tabela:** Comparação entre os métodos de Euler e de Taylor de ordem 2 pelos erros absolutos (em módulo) em relação à solução exata para vários valores de  $n$

| $t_i$ | $n = 20$             |                      | $n = 40$             |                      | $n = 80$             |                      |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|       | Euler                | Taylor 2ª ordem      | Euler                | Taylor 2ª ordem      | Euler                | Taylor 2ª ordem      |
| 0.0   | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  |
| 0.2   | $1.5 \times 10^{-2}$ | $1.9 \times 10^{-4}$ | $7.8 \times 10^{-3}$ | $4.9 \times 10^{-5}$ | $4.0 \times 10^{-3}$ | $1.2 \times 10^{-5}$ |
| 0.4   | $3.3 \times 10^{-2}$ | $4.6 \times 10^{-4}$ | $1.7 \times 10^{-2}$ | $1.2 \times 10^{-4}$ | $8.5 \times 10^{-3}$ | $3.1 \times 10^{-5}$ |
| 0.6   | $5.2 \times 10^{-2}$ | $8.5 \times 10^{-4}$ | $2.7 \times 10^{-2}$ | $2.2 \times 10^{-4}$ | $1.4 \times 10^{-2}$ | $5.6 \times 10^{-5}$ |
| 0.8   | $7.3 \times 10^{-2}$ | $1.4 \times 10^{-3}$ | $3.8 \times 10^{-2}$ | $3.6 \times 10^{-4}$ | $1.9 \times 10^{-2}$ | $9.1 \times 10^{-5}$ |
| 1.0   | $9.7 \times 10^{-2}$ | $2.1 \times 10^{-3}$ | $5.0 \times 10^{-2}$ | $5.5 \times 10^{-4}$ | $2.6 \times 10^{-2}$ | $1.4 \times 10^{-4}$ |
| 1.2   | $1.2 \times 10^{-1}$ | $3.1 \times 10^{-3}$ | $6.4 \times 10^{-2}$ | $8.0 \times 10^{-4}$ | $3.2 \times 10^{-2}$ | $2.0 \times 10^{-4}$ |
| 1.4   | $1.5 \times 10^{-1}$ | $4.4 \times 10^{-3}$ | $7.8 \times 10^{-2}$ | $1.1 \times 10^{-3}$ | $4.0 \times 10^{-2}$ | $2.9 \times 10^{-4}$ |
| 1.6   | $1.8 \times 10^{-1}$ | $6.1 \times 10^{-3}$ | $9.4 \times 10^{-2}$ | $1.6 \times 10^{-3}$ | $4.8 \times 10^{-2}$ | $4.1 \times 10^{-4}$ |
| 1.8   | $2.1 \times 10^{-1}$ | $8.4 \times 10^{-3}$ | $1.1 \times 10^{-1}$ | $2.2 \times 10^{-3}$ | $5.7 \times 10^{-2}$ | $5.6 \times 10^{-4}$ |
| 2.0   | $2.4 \times 10^{-1}$ | $1.1 \times 10^{-2}$ | $1.3 \times 10^{-1}$ | $3.0 \times 10^{-3}$ | $6.5 \times 10^{-2}$ | $7.6 \times 10^{-4}$ |

# Método de Taylor de ordem superior

## Teorema – erro absoluto no método de Taylor

Se o método de Taylor for usado para resolver o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

com tamanho de passo  $h$  e se  $y \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ , então o erro máximo de truncamento tem ordem  $h^n$ .

# Método de Taylor de ordem superior

## Teorema – erro absoluto no método de Taylor

Se o método de Taylor for usado para resolver o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

com tamanho de passo  $h$  e se  $y \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ , então o erro máximo de truncamento tem ordem  $h^n$ .

- Se estamos com Taylor de 2ª ordem, reduzir  $h$  pela metade é reduzir o erro à quarta parte, aproximadamente.
- Quanto maior o grau do polinômio de Taylor aproximante, mais rápida é a convergência.

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# Métodos de Runge-Kutta

- Os métodos de Taylor ordem têm a desvantagem de termos que calcular e determinar as derivadas de ordem superior em cada ponto.
- Esta é uma tarefa cara, computacionalmente.
- Os métodos de Runge-Kutta (desenvolvidos entre 1890 e 1910) têm alta ordem de convergência e dispensam o conhecimento das derivadas de ordem superior.

# Métodos de Runge-Kutta

Necessitamos enunciar o Teorema de Taylor para duas variáveis.

## Teorema de Taylor (caso $n = 2$ variáveis)

Se  $f(t, y)$  tenha derivadas parciais de ordem até 3 contínuas. Para cada  $(t, y)$ , existem  $t_0 < \xi < t$  e  $y_0 < \mu < y$  de modo que  $f(t, y) = P_2(t, y) + R_2(t, y)$  onde:

$$\begin{aligned} P_2(t, y) &= f(t_0, y_0) + \left[ (t - t_0) \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (t - t_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0, y_0) + 2(t - t_0)(y - y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0, y_0) \right. \\ &+ \left. (y - y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0, y_0) \right] \end{aligned}$$

# Métodos de Runge-Kutta

Necessitamos enunciar o Teorema de Taylor para duas variáveis.

## Teorema de Taylor (caso $n = 2$ variáveis)

Se  $f(t, y)$  tenha derivadas parciais de ordem até 3 contínuas. Para cada  $(t, y)$ , existem  $t_0 < \xi < t$  e  $y_0 < \mu < y$  de modo que  $f(t, y) = P_2(t, y) + R_2(t, y)$  onde:

$$R_2(t, y) = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (t - t_0)^{3-j} (y - y_0)^j \frac{\partial^3 f}{\partial t^{3-j} \partial y^j}(\xi, \mu)$$

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- No método de Taylor de ordem 2, as iteradas eram do tipo:

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot T^2(t_i, w_i)$$

em que

$$T^2(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i)$$

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- No método de Taylor de ordem 2, as iteradas eram do tipo:

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot T^2(t_i, w_i)$$

em que

$$T^2(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i)$$

- A ideia do método de Runge-Kutta é encontrar  $\alpha$  e  $\beta$  para aproximar o termo  $T^2(t_i, w_i)$  por uma expressão do tipo  $f(t + \alpha, y + \beta)$  com um erro da ordem  $h^2$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- No método de Taylor de ordem 2, as iteradas eram do tipo:

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot T^2(t_i, w_i)$$

em que

$$T^2(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i)$$

- A ideia do método de Runge-Kutta é encontrar  $\alpha$  e  $\beta$  para aproximar o termo  $T^2(t_i, w_i)$  por uma expressão do tipo  $f(t + \alpha, y + \beta)$  com um erro da ordem  $h^2$ .
- Se conseguirmos isto, será bom, porque a expressão  $f(t + \alpha, y + \beta)$  não envolve derivada.

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- Como na expressão de  $T^2(t_i, w_i)$  envolve  $f'$ , vamos encontrar uma expressão para ela:

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- Como na expressão de  $T^2(t_i, w_i)$  envolve  $f'$ , vamos encontrar uma expressão para ela:

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y)$$

graças à regra da Cadeia.

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- Como na expressão de  $T^2(t_i, w_i)$  envolve  $f'$ , vamos encontrar uma expressão para ela:

$$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y)$$

graças à regra da Cadeia.

- Então:

$$T^2(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y)$$

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- Agora expandimos  $f(t + \alpha, y + \beta)$  em seu polinômio de Taylor de grau 1:

$$f(t + \alpha, y + \beta) = f(t, y) + \alpha \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + R_1(\xi, \mu)$$

onde

$$R_1(\xi, \mu) = \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu).$$

- Agora, comparamos as expressões de  $T^2(t, y)$  e de  $f(t + \alpha, y + \beta)$  que obtivemos, na tentativa de encontrarmos  $\alpha$  e  $\beta$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- Coeficiente de  $\frac{\partial f}{\partial t}$  : implica  $\alpha = \frac{h}{2}$
- Coeficiente de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  : implica  $\beta = \frac{h}{2} f(t, y)$
- Já determinamos  $\alpha$  e  $\beta$ . Podemos calcular  $R_1(\xi, \mu)$ :

$$R_1(\xi, \mu) = \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \mu) + \frac{h^2}{8} f(t, y)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \mu),$$

que é de ordem 2, como queríamos.

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

Temos então o primeiro método de Runge-Kutta:

## Método de Runge-Kutta (Ponto Médio)

As iteradas do método do Ponto Médio são definidas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right), \end{cases}$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Trata-se de uma aproximação de *segunda ordem*

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

O algoritmo para este método é dado a seguir:

---

**Algoritmo 3:** Método de Runge-Kutta de ordem 2 para PVI's

---

**Input:**  $f, a, b, n, \alpha$ ;

$h = (b - a)/n$ ;

$t = a$ ;

$w = \alpha$ ;

**for**  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  **do**

$t = a + i \cdot h$ ;

$w = w + hf\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{h}{2}f(t, w)\right)$ ;

**end**

**Output:**  $(t, w)$ .

---

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .
- Em seguida, dá-se um passo de Euler de tamanho  $h/2$  usando  $k_1$  a partir de  $t_i$ . Então obtemos o ponto  $(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_1)$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .
- Em seguida, dá-se um passo de Euler de tamanho  $h/2$  usando  $k_1$  a partir de  $t_i$ . Então obtemos o ponto  $(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_1)$ .
- Calcula-se um novo coeficiente angular neste novo ponto, isto é,  $k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_1)$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

- O método calcula dois coeficiente angulares. Primeiro,  $k_1 = f(t_i, w_i)$  no ponto corrente  $t_i$ .
- Em seguida, dá-se um passo de Euler de tamanho  $h/2$  usando  $k_1$  a partir de  $t_i$ . Então obtemos o ponto  $(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_1)$ .
- Calcula-se um novo coeficiente angular neste novo ponto, isto é,  $k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_1)$ .
- Finalmente, damos um passo de Euler de tamanho  $h$  a partir de  $t_i$  usando-se o coeficiente angular  $k_2$ , i.e.,  $k = k_2$  para obtermos a nova aproximação  $w_{i+1} = w_i + hk$

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

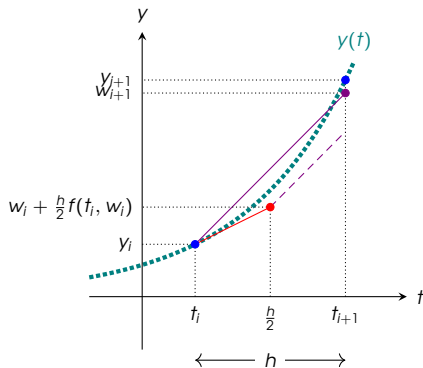


Figura: Interpretação geométrica do método do Ponto Médio

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

## Exemplo

Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - 3t + 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

Usamos o método de Runge-Kutta para aproximar a solução  $y(t)$  no intervalo  $[0, 2]$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

Cálculos do método de Runge-Kutta no PVI  $y' = y - 3t + 1$ ,  $y(0) = 0.5$  com  $n = 10$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

Convergência método de Runge-Kutta no PVI  $y' = y - 3t + 1$ ,  $y(0) = 0.5$  para vários valores de  $n$ .

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - **Runge-Kutta de ordem 4**
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

Outros métodos de Runge-Kutta de ordem mais alta podem ser obtidos. A ideia básica é aproximar  $T^n(t_i, w_i)$ . Se isso for feito para  $n = 4$  teremos o Runge-Kutta de quarta ordem, o mais utilizado dentre os métodos para PVIs.

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

## Método de Runge-Kutta de ordem 4

$$w_0 = \alpha$$

$$k_1 = f(t_i, w_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_{i+1}, w_i + hk_3)$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 2)

O algoritmo para este método é dado a seguir:

---

**Algoritmo 4:** Método de Runge-Kutta de ordem 4 para PVI's

---

**Input:**  $f, a, b, n, \alpha$ ;

$h = (b - a)/n$ ;

$t = a$ ;

$w = \alpha$ ;

**for**  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  **do**

$t = a + i \cdot h$ ;

$k_1 = f(t, w)$ ;

$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{h}{2}k_1\right)$ ;

$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{h}{2}k_2\right)$ ;

$k_4 = f(t + h, w + hk_3)$ ;

$w = w + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ ;

**end**

**Output:**  $(t, w)$ .

---

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

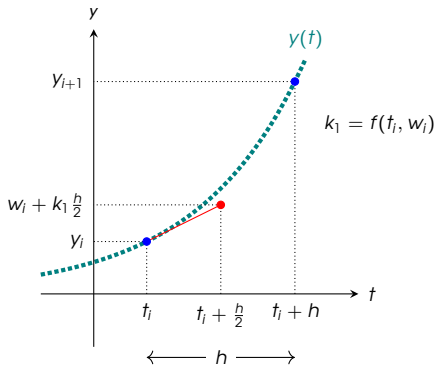


Figura: Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

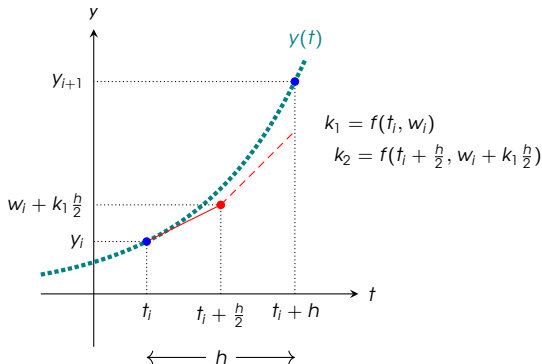


Figura: Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

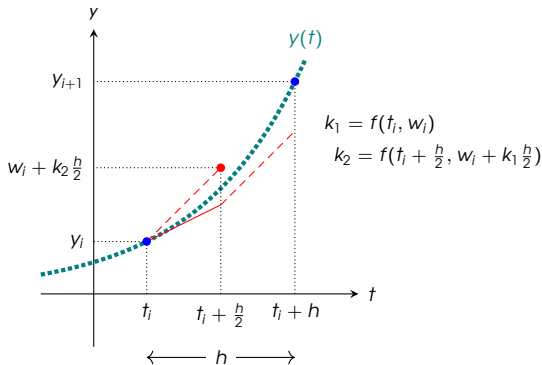
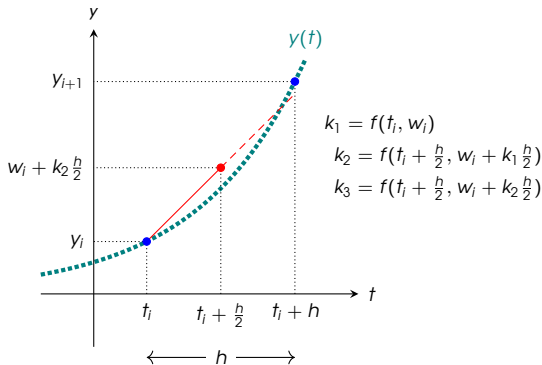


Figura: Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)



**Figura:** Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

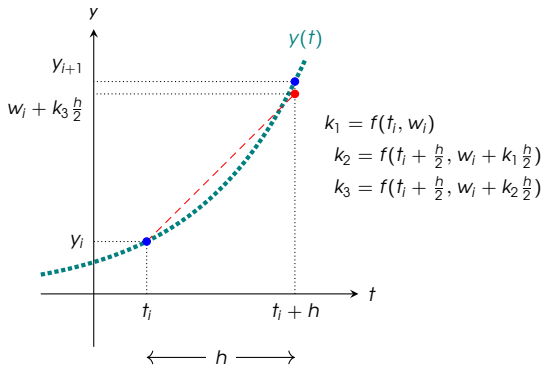


Figura: Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

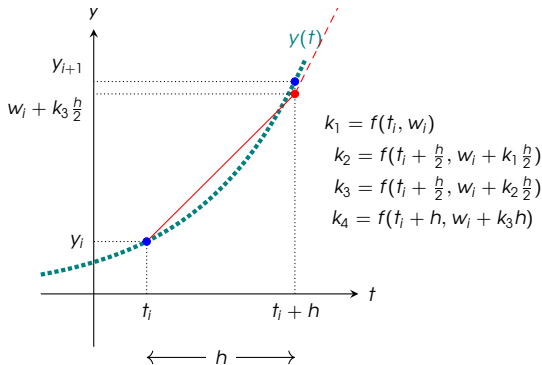


Figura: Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

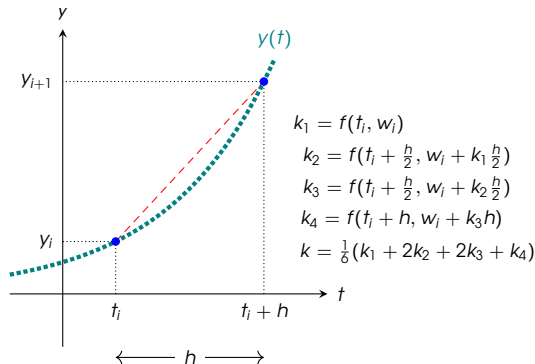
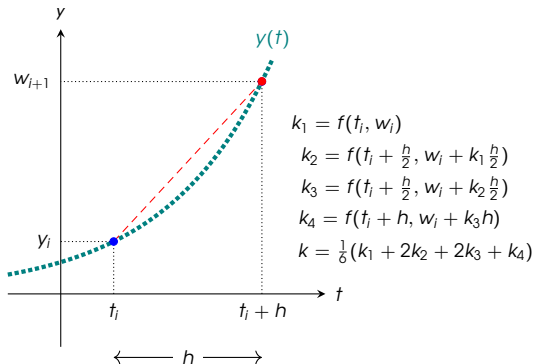


Figura: Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)



**Figura:** Interpretação geométrica do método Runge-Kutta de ordem 4

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

## Exemplo

Resolva o PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - 3t + 1, & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

Usamos o método de Euler melhorado para aproximar a solução  $y(t)$  no intervalo  $[0, 2]$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

Cálculos do método de Runge-Kutta no PVI  $y' = y - 3t + 1$ ,  $y(0) = 0.5$  com  $n = 10$ .

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

**Tabela:** Comparação entre os métodos de Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem pelos erros absolutos (em módulo) em relação à solução exata para vários valores de  $n$

| $t_i$ | $n = 20$             |                      | $n = 40$             |                      | $n = 80$             |                      |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|       | 2ª ordem             | 4ª ordem             | 2ª ordem             | 4ª ordem             | 2ª ordem             | 4ª ordem             |
| 0.0   | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  | 0.0                  |
| 0.2   | $5.7 \times 10^{-4}$ | $2.8 \times 10^{-7}$ | $1.5 \times 10^{-4}$ | $2.0 \times 10^{-8}$ | $3.7 \times 10^{-5}$ | 0.0                  |
| 0.4   | $1.4 \times 10^{-3}$ | $6.9 \times 10^{-7}$ | $3.6 \times 10^{-4}$ | $4.0 \times 10^{-8}$ | $9.2 \times 10^{-5}$ | 0.0                  |
| 0.6   | $2.5 \times 10^{-3}$ | $1.3 \times 10^{-6}$ | $6.6 \times 10^{-4}$ | $8.0 \times 10^{-8}$ | $1.7 \times 10^{-4}$ | $1.0 \times 10^{-8}$ |
| 0.8   | $4.1 \times 10^{-3}$ | $2.1 \times 10^{-6}$ | $1.1 \times 10^{-3}$ | $1.3 \times 10^{-7}$ | $2.7 \times 10^{-4}$ | $1.0 \times 10^{-8}$ |
| 1.0   | $6.3 \times 10^{-3}$ | $3.1 \times 10^{-6}$ | $1.6 \times 10^{-3}$ | $2.0 \times 10^{-7}$ | $4.2 \times 10^{-4}$ | $1.0 \times 10^{-8}$ |
| 1.2   | $9.2 \times 10^{-3}$ | $4.6 \times 10^{-6}$ | $2.4 \times 10^{-3}$ | $3.0 \times 10^{-7}$ | $6.1 \times 10^{-4}$ | $2.0 \times 10^{-8}$ |
| 1.4   | $1.3 \times 10^{-2}$ | $6.5 \times 10^{-6}$ | $3.4 \times 10^{-3}$ | $4.3 \times 10^{-7}$ | $8.7 \times 10^{-4}$ | $3.0 \times 10^{-8}$ |
| 1.6   | $1.8 \times 10^{-2}$ | $9.1 \times 10^{-6}$ | $4.8 \times 10^{-3}$ | $5.9 \times 10^{-7}$ | $1.2 \times 10^{-3}$ | $4.0 \times 10^{-8}$ |
| 1.8   | $2.5 \times 10^{-2}$ | $1.3 \times 10^{-5}$ | $6.6 \times 10^{-3}$ | $8.2 \times 10^{-7}$ | $1.7 \times 10^{-3}$ | $5.0 \times 10^{-8}$ |
| 2.0   | $3.4 \times 10^{-2}$ | $1.7 \times 10^{-5}$ | $8.9 \times 10^{-3}$ | $1.1 \times 10^{-6}$ | $2.3 \times 10^{-3}$ | $7.0 \times 10^{-8}$ |

# Métodos de Runge-Kutta (ordem 4)

Convergência dos métodos de Runge-Kutta de 2ª e 4ª ordem no PVI  $y' = y - 3t + 1$ ,  $y(0) = 0.5$  para vários valores de  $n$ .

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - **Sistemas de EDOs (2 equações)**
  - EDOs de ordem superior

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Podemos aplicar adaptar o método de Euler para resolvermos sistemas de PVIs de  $n = 2$  (ou mais) equações. Tal sistema pode ser posto na forma:

$$\begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1, y_2) \\ y_2'(t) = f_2(t, y_1, y_2) \\ y_1(a) = \alpha_1 \\ y_2(a) = \alpha_2 \end{cases}$$

ou seja, as incógnitas são as funções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  sujeita às condições iniciais.

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Tal sistema pode ser posto na forma vetorial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Nosso objetivo é gerar aproximações  $\mathbf{w}^i$  para  $\mathbf{y}$ , onde

$$\mathbf{w}^i = \begin{bmatrix} w_1^i \\ w_2^i \end{bmatrix},$$

para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ .

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Para adaptar o Método de Euler em um sistema de PVI de duas equações façamos o seguinte:

- Iniciamos  $\mathbf{w}^0 = \mathbf{y}_0$ ,  $t_0 = a$  e para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  faremos o seguinte:
  - Calculamos  $\mathbf{k} = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}^i)$
  - Atualizamos  $\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + h\mathbf{k}$  e  $t_{i+1} = a + h \cdot i$

Lembre-se de fazer estas contas vetorialmente!

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Algoritmo a ser implementado:

---

**Algoritmo 5:** Método de Euler para um sistema de PVI

---

**Input:**  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{y}_0$ ,  $a$ ,  $b$  e  $n$ ;

$h = (b - a)/n$ ;

$t = a$ ;

$\mathbf{w}^0 = \mathbf{y}_0$ ;

**for**  $i = 0, 1, \dots, n-1$  **do**

$t = a + i \cdot h$ ;

$\mathbf{k} = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}^i)$ ;

$\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + h \cdot \mathbf{k}$ ;

**end**

**Output:**  $(t, \mathbf{w})$ .

---

# Sistemas de EDOs (2 equações)

## Exemplo

Calcule 20 aproximações para a solução do PVI

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(1 - 0.5y_2) \\ y_2'(t) = y_2(-0.75 + 0.5y_1) \\ y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 3 \end{cases}$$

no intervalo  $0 \leq t \leq 5$  usando o método de Euler<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>Este sistema é conhecido como *Lotka-Volterra*

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Tal sistema pode ser posto na forma vetorial:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} y_1(1 - 0.5y_2) \\ y_2(-0.75 + 0.5y_1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Agora vamos aos cálculos.

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Os cálculos das 20 iterações estão apresentados a seguir:

# Sistemas de EDOs (2 equações)

As aproximações estão apresentadas a seguir.

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Para adaptar o Método de Euler Melhorado em um sistema de PVI de duas equações, façamos o seguinte:

- Iniciamos  $\mathbf{w}^0 = \mathbf{y}_0$  e para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  faremos o seguinte:
  - Calculamos  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}^i)$
  - Calculamos  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{w}^i + h \cdot \mathbf{k}_1)$
  - Atualizamos  $\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + \frac{h}{2} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  e  $t_i = a + h \cdot i$

Lembre-se de fazer estas contas vetorialmente!

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Algoritmo a ser implementado:

---

**Algoritmo 6:** Método de Euler Melhorado para um sistema de PVI

---

**Input:**  $\mathbf{f}, \mathbf{y}_0, a, b$  e  $n$ ;

$h = (b - a)/n$ ;

$t = a$ ;

$\mathbf{w}^0 = \mathbf{y}_0$ ;

**for**  $i = 0, 1, \dots, n-1$  **do**

$t = a + i \cdot h$ ;

$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}^i)$ ;

$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_i + h, \mathbf{w}^i + h \cdot \mathbf{k}_1)$ ;

$\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{w}^i + \frac{h}{2} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ ;

**end**

**Output:**  $(t, \mathbf{w})$ .

---

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Voltamos ao sistema anterior, que é escrito vetorialmente por:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} y_1(1 - 0.5y_2) \\ y_2(-0.75 + 0.5y_1) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aplicamos o método de Euler Melhorado a ele.

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Os cálculos das 20 iterações estão apresentados a seguir:

# Sistemas de EDOs (2 equações)

As aproximações estão apresentadas a seguir.

# Sistemas de EDOs (2 equações)

A comparação entre os métodos de Euler e Euler Melhorado no mesmo exemplo é apresentada a seguir.

# Sumário

- 1 Teoria preliminar
- 2 O Método de Euler
  - Método de Euler melhorado
- 3 Método de Taylor de ordem superior
- 4 Métodos de Runge-Kutta
  - Runge-Kutta de ordem 2
  - Runge-Kutta de ordem 4
  - Sistemas de EDOs (2 equações)
  - EDOs de ordem superior

# EDOs de ordem superior

Um PVI de ordem  $n$  pode ser transformado num sistema de PVI de  $n$  equações. Veja o exemplo a seguir:

## Exemplo

Escreva o PVI de segunda ordem a seguir:

$$\begin{cases} y''(t) &= (\sin t)y' + (\ln t)y + t^2 \\ y(1) &= 3 \\ y'(1) &= 5 \end{cases}$$

como um sistema de EDOs.

# EDOs de ordem superior

- Seja  $z = y'$  então  $y'(1) = z(1) = 5$  e  $y'' = z'$ . Logo, o PVI pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} z'(t) = f_1(t, y, z) = (\sin t)z + (\ln t)y + t^2 \\ y'(t) = f_2(t, y, z) = z \\ y(1) = 3 \\ z(1) = 5 \end{cases}$$

# EDOs de ordem superior

- Na forma matricial podemos reescrever como:

$$\begin{cases} y'(t) = \mathbf{f}(t, y, z) \\ \mathbf{y}(1) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

onde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \sin(t)z + (\ln t)y + t^2 \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

# Sistemas de EDOs (2 equações)

Os cálculos estão disponíveis a seguir:

Deveremos olhar para o vetor  $y$ , ele é a solução da EDO original.

# EDOs de ordem superior

## Exemplo

Use o método de Euler Melhorado para estimar a altura máxima atingida por uma bola, arremessada por um garoto, de uma altura de 1.8 m a uma velocidade de 12 m/s. Considere  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

# EDOs de ordem superior

- É bem sabido que, se  $s(t)$  é a posição da bola no instante  $t \geq 0$  então caímos no PVI de segunda ordem:

$$\begin{cases} s''(t) &= -g \\ s(0) &= 1.8 \\ s'(0) &= 12 \end{cases}$$

- Precisamos transformar este PVI num sistema de duas equações.

# EDOs de ordem superior

- Sendo  $s' = v$  então  $s'' = v'$ . As condições iniciais ficam da seguinte forma:  $s(0) = 1.8$  e  $v(0) = 12$ ; portanto o sistema será dado por:

$$\begin{cases} v'(t) = f_1(t, v, s) = -10 \\ s'(t) = f_2(t, v, s) = v \\ v(0) = 12 \\ s(0) = 1.8 \end{cases}$$

- Que escrito matricialmente, é:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \end{cases}$$

onde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} v(t) \\ s(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -10 \\ v \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ 1.8 \end{bmatrix}$$

# EDOs de ordem superior

Resolvendo-o no intervalo  $[0, 10]$  e com  $h = 1$  teremos os seguintes cálculos:

Deveremos ver o instante onde  $v(t) = 0$ . Que instante é este?

# Referências I



R. L. B. Annette M. Burden, J. Douglas Faires, *Numerical Analysis*.  
Cengage Learning, 2015.



M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais*.  
Makron Books do Brasil, 1997.



N. B. Franco, *Cálculo numérico*.  
Pearson, 2006.